# TRASFORMAZIONI DEL PIANO E GRAFICI

## RICHIAMI DI TEORIA

***Definizione:*** *consideriamo il piano* $\mathbf{R}^2$ *munito di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Una* **trasformazione del piano** *è una legge che consente di associare ad ogni punto* $P = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ *un punto* $P' = (X, Y) \in \mathbf{R}^2$ .

### Esempi di trasformazioni del piano

- **Le traslazioni**

$$\tau(p,q): \begin{cases} X = x + p \\ Y = y + q \end{cases} \qquad \tau^{-1}(p,q): \begin{cases} x = X - p \\ y = Y - q \end{cases}$$

* Noto il punto $Q(x_0, y_0)$, otteniamo le coordinate del punto trasformato $Q'$ (utilizzando la trasformazione $\tau$) mediante la sostituzione $\begin{bmatrix} x_0 \to x_0 + p \\ y_0 \to y_0 + q \end{bmatrix}$: $Q = (x_0, y_0) \xrightarrow{\tau(p,q)} Q'(x_0 + p, y_0 + q)$

* Nota la funzione $y = f(x)$, otteniamo l'espressione della sua trasformata (utilizzando la trasformazione inversa $\tau^{-1}$) mediante la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to x - p \\ y \to y - q \end{bmatrix}$: $y = f(x) \xrightarrow{\tau(p,q)} y - q = f(x - p) \leftrightarrow y = f(x - p) + q$

Il parametro $\boldsymbol{p}$ indica lo spostamento lungo l'asse $x$: se $p>0$ si ha una traslazione verso destra, se $p<0$ una traslazione verso sinistra.
Il parametro $\boldsymbol{q}$ indica lo spostamento lungo l'asse $y$: se $q>0$ si ha una traslazione verso l'alto, se $q<0$ una traslazione verso il basso.

- **Le dilatazioni**

$$d(m,n): \begin{cases} X = mx \\ Y = ny \end{cases} \qquad d^{-1}(m,n): \begin{cases} x = \dfrac{1}{m}X \\ y = \dfrac{1}{n}Y \end{cases} \;,\; m,n \in \mathbf{R}^{+}$$

∗ Noto il punto $Q(x_0, y_0)$, otteniamo le coordinate del punto trasformato $Q'$ mediante la sostituzione $\begin{bmatrix} x_0 \to mx_0 \\ y_0 \to ny_0 \end{bmatrix}$:

$$Q = (x_0, y_0) \xrightarrow{d(m,n)} Q'(mx_0, ny_0)$$

∗ Nota la funzione $y = f(x)$, otteniamo l'espressione della sua trasformata mediante la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to \dfrac{1}{m}x \\ y \to \dfrac{1}{n}y \end{bmatrix}$:

$$y = f(x) \xrightarrow{d(m,n)} \frac{1}{n}y = f\left(\frac{x}{m}\right) \leftrightarrow y = n \cdot f\left(\frac{x}{m}\right)$$

Il parametro ***m*** indica la dilatazione lungo l'asse $x$: se $m>1$ il piano viene allungato (nella direzione dell'asse delle ascisse), se $0<m<1$ il piano viene compresso.
Il parametro ***n*** indica la dilatazione lungo l'asse $y$: se $n>1$ il piano viene allungato (nella direzione dell'asse delle ordinate), se $0<n<1$ il piano viene compresso.

- **Le simmetrie rispetto agli assi e all'origine**

| Simmetria rispetto | Equazione | Nota la funzione $y=f(x)$, ottieniamo l'espressione della sua trasformata mediante la sostituzione |
|---|---|---|
| asse $x$ | $s_x:\begin{cases} X=x \\ Y=-y \end{cases}$ | $\begin{bmatrix} x\to x \\ y\to -y \end{bmatrix}$ $\quad y=f(x)\xrightarrow{s_x} y=-f(x)$ |
| asse $y$ | $s_y:\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases}$ | $\begin{bmatrix} x\to -x \\ y\to y \end{bmatrix}$ $\quad y=f(x)\xrightarrow{s_y} y=f(-x)$ |
| origine | $s_o:\begin{cases} X=-x \\ Y=-y \end{cases}$ | $\begin{bmatrix} x\to -x \\ y\to -y \end{bmatrix}$ $\quad y=f(x)\xrightarrow{s_o} y=-f(-x)$ |

- **Le affinità**

$$\boldsymbol{a}(m,n):\begin{cases} X=mx \\ Y=ny \end{cases} \quad m,n\neq 0$$

***Proposizione:*** *un'affinità, nel caso in cui almeno uno dei due coefficienti sia negativo, è la composizione di una dilatazione e di una simmetria.*

- **Simmetrie rispetto alle bisettrici**

Simmetria rispetto a *y*=*x*

$$s_{y=x}:\begin{cases} X = y \\ Y = x \end{cases}$$

Simmetria rispetto a *y*= -*x*

$$s_{y=-x}:\begin{cases} X = -y \\ Y = -x \end{cases}$$

## Funzioni pari e funzioni dispari

***Definizione***: *una funzione reale di variabile reale è* **pari** *se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e se per ogni x* **Î** *dom f risulta* $f(-x) = f(x)$.

*Una funzione reale di variabile reale è* **dispari** *se il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e se per ogni x* **Î** *dom f risulta* $f(-x) = -f(x)$.

*Se una funzione è pari il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, se è dispari il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.*

## ESEMPI

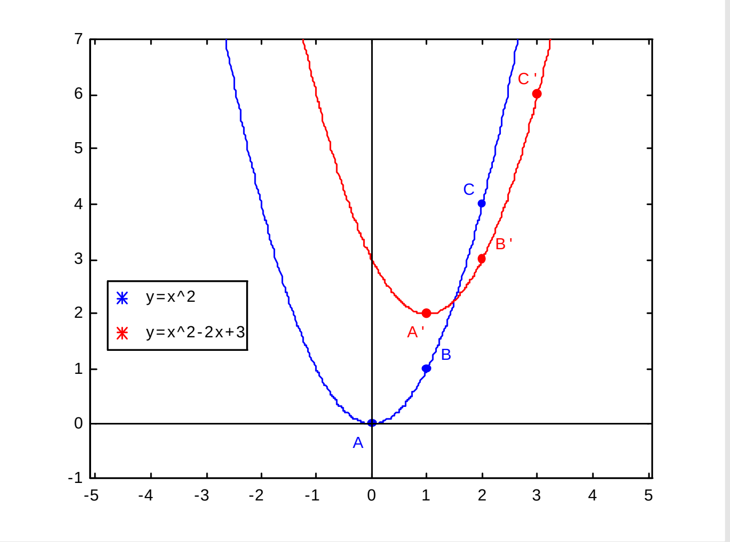
*1. Applicare la traslazione* **t** *(1, 2) alla parabola g: y = $x^2$, determinando i trasformati dei suoi punti A= (0, 0), B=(1, 1), C=(2, 4) e l'equazione della sua traslata g'.*

Per determinare le coordinate dei punti trasformati usiamo la sostituzione $\begin{bmatrix} x_0 \to x_0 + 1 \\ y_0 \to y_0 + 2 \end{bmatrix}$; otteniamo: $\begin{matrix} A = (0,0) \xrightarrow{t} A' = (1,2) \\ B = (1,1) \xrightarrow{t} B' = (2,3) \\ C = (2,4) \xrightarrow{t} C' = (3,6) \end{matrix}$

Per determinare l'equazione della curva trasformata *g'* utilizziamo la sostituzione $\begin{bmatrix} x \to x - 1 \\ y \to y - 2 \end{bmatrix}$;

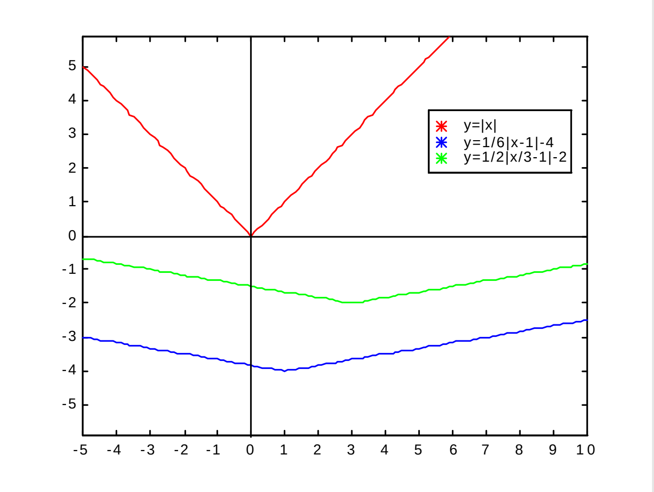
otteniamo: $g: y = x^2 \xrightarrow{t} g': y - 2 = (x-1)^2 \leftrightarrow y = x^2 - 2x + 3$

E' semplice verificare che, come dovevamo aspettarci, i punti A', B', C' appartengono alla parabola *g'*.



2. Assegnate la funzione γ: $g: y = |x|$ e le trasformazioni $t(1,-4)$ e $d\left(3, \frac{1}{2}\right)$, determinare le equazioni ed i grafici delle curve $g'$ e $g''$, ottenute da γ applicando le trasformazioni composte $T_1 = t \cdot d$ e $T_2 = d \cdot t$ rispettivamente.

***Definizione:*** *il* **prodotto** *(o* **composizione***)* **di** *due o più* **trasformazioni** *è l'applicazione successiva delle trasformazioni con la seguente regola: se $t_1$ e $t_2$ sono le due trasformazioni, il prodotto $t_1 \times t_2$ impone che si applichi prima $t_1$ e poi $t_2$, mentre $t_2 \times t_1$ esattamente il contrario.*
*In generale il prodotto di trasformazioni non gode della proprietà commutativa.*




La trasformazione $T_1$, composizione della traslazione τ e della dilatazione δ, si ottiene applicando prima δ e poi τ; mentre la trasformazione $T_2$ si ottiene applicando prima τ e poi δ.

- $T_1$: $g: y = |x| \xrightarrow{d} 2y = \left|\frac{x}{3}\right| \leftrightarrow y = \frac{|x|}{6} \xrightarrow{t} g': y + 4 = \frac{|x-1|}{6} \leftrightarrow y = \frac{|x-1|}{6} - 4$

- $T_2$: $g: y = |x| \xrightarrow{t} y + 4 = |x-1| \leftrightarrow y = |x-1| - 4 \xrightarrow{d} g'': 2y = \left|\frac{x}{3} - 1\right| - 4 \leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left|\frac{x}{3} - 1\right| - 2$

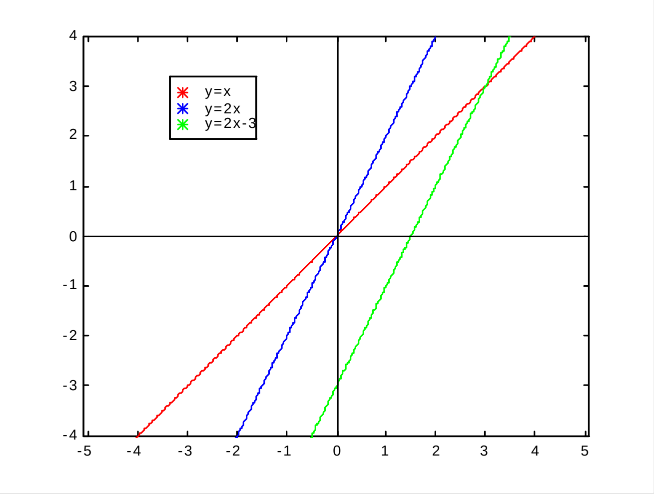
3. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni indicando le trasformazioni che consentono di ottenerli a partire dal grafico di opportune funzioni elementari.

- $y = 2x - 3 = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da $y = x$ utilizzando, ad esempio, le trasformazioni:

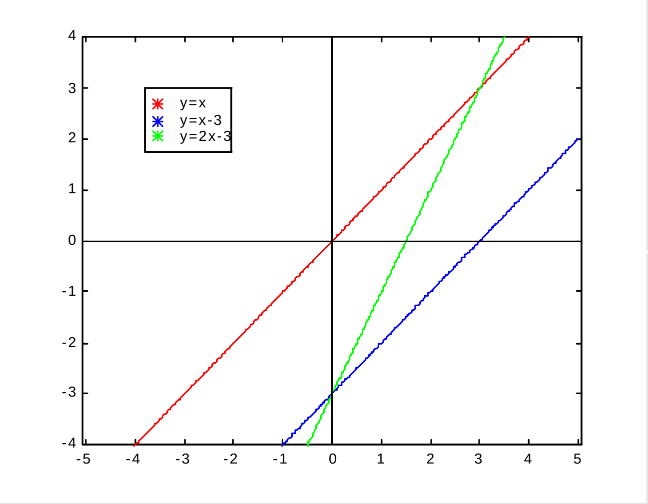
∗ Una dilatazione sulle *y* di rapporto *n*=2 ed una traslazione sulle *x* verso destra di modulo *p* = 3/2:

$$y = x \xrightarrow{d(1,2)} y = 2x \xrightarrow{t\left(0,\frac{3}{2}\right)} y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$




∗ Una traslazione sulle *y* verso il basso di modulo *q*= -3 ed una compressione sulle *x* di rapporto *m*=1/2:

$$y = x \xrightarrow{t(0,-3)} y = x - 3 \xrightarrow{d\left(\frac{1}{2},1\right)} y = 2x - 3$$

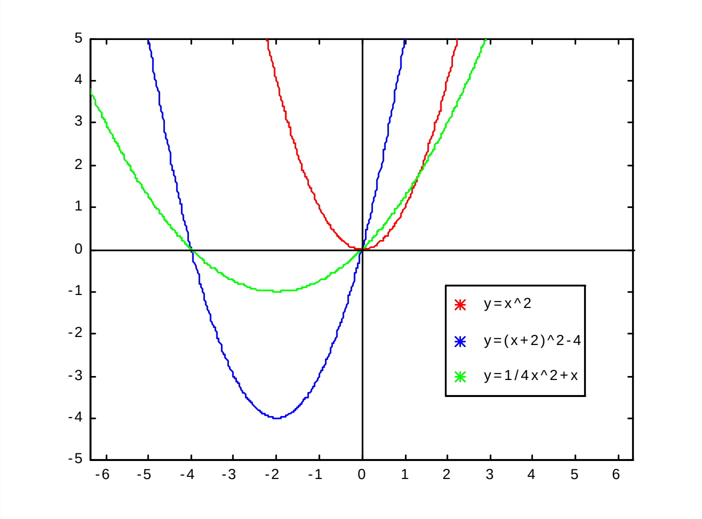


- $y=\frac{1}{4}x^2+x=\frac{1}{4}\left(x^2+4x\right)=\frac{1}{4}\left(x^2+4x+4-4\right)=\frac{1}{4}\left[\left(x+2\right)^2-4\right]=\frac{1}{4}\left(x+2\right)^2-1$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da $y=x^2$ utilizzando, ad esempio, le trasformazioni:

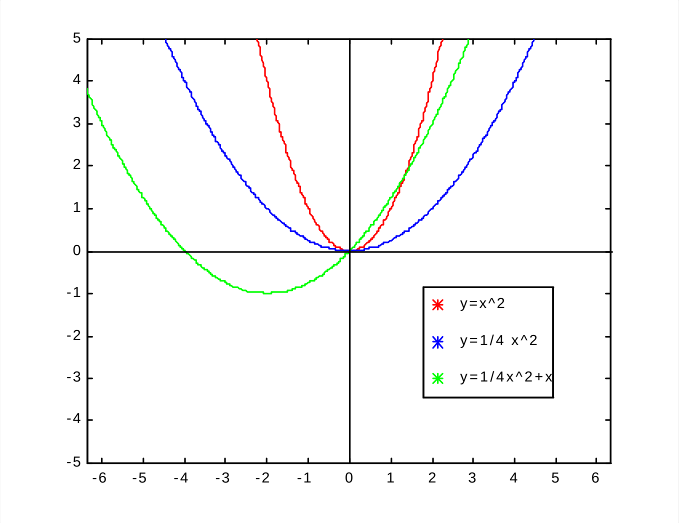
∗ Una traslazione sulle *x* verso sinistra di modulo *p*=-2 e sulle *y* verso il basso di modulo *q*= -4 ed una compressione sulle *y* di rapporto *n*=1/4:

$$y=x^2\xrightarrow{t(-2,-4)}y=\left(x+2\right)^2-4\xrightarrow{d\left(1,\frac{1}{4}\right)}y=\frac{1}{4}\left(\left(x+2\right)^2-4\right)$$



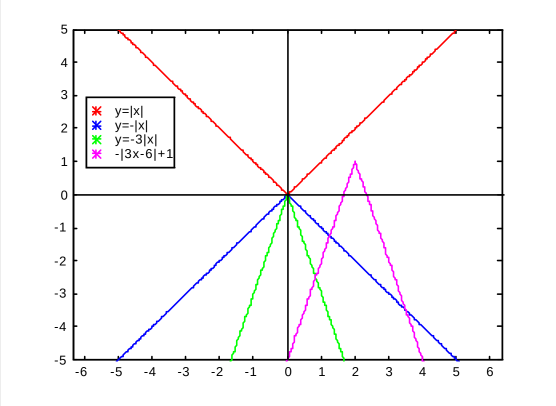

∗ Una dilatazione sulle *x* di rapporto *m*=2 ed una traslazione sulle *x* verso sinistra di modulo *p* = -2 e sulle *y* verso il basso di modulo *q* = -1:

$$y=x^2\xrightarrow{d(2,1)}y=\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}x^2\xrightarrow{t(-2,-1)}y=\frac{1}{4}\left(x+2\right)^2-1$$



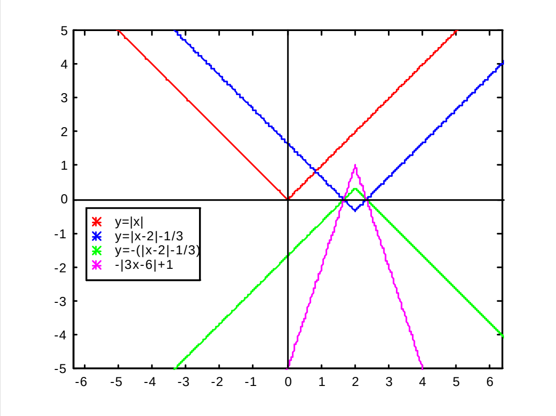
- $y = -|3x-6|+1 = -3|x-2|+1 = -3\left(|x-2|-\frac{1}{3}\right)$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da $y=|x|$ utilizzando, ad esempio, le trasformazioni:




∗ Una simmetria rispetto all'asse *x*, una dilatazione su *y* di rapporto *n*=3, una traslazione su *x* verso destra di modulo *p*=2 e su *y* verso l'alto di modulo *q*=1.

$$y=|x| \xrightarrow{s_x} y=-|x| \xrightarrow{d(1,3)} y=-3|x| \xrightarrow{t(2,1)} y=-3|x-2|+1$$




∗ Una traslazione su *x* verso destra di modulo *p*=2 e su *y* verso il basso di modulo *q*=-1/3, una simmetria rispetto all'asse *x*, una dilatazione su *y* di rapporto *n*=3:

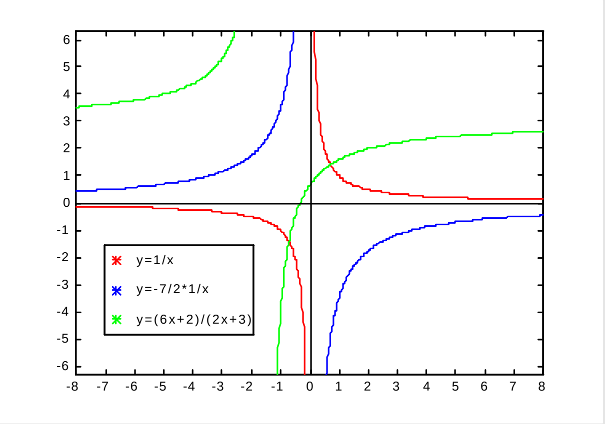
$$y=|x| \xrightarrow{t\left(2,-\frac{1}{3}\right)} y=|x-2|-\frac{1}{3} \xrightarrow{s_x} y=-\left(|x-2|-\frac{1}{3}\right) \xrightarrow{d(1,3)} y=-3\left(|x-2|-\frac{1}{3}\right)$$

- $y=\dfrac{6x+2}{2x+3}=-\dfrac{7}{2x+3}+3=-\dfrac{\frac{7}{2}}{x+\frac{3}{2}}+3=-\dfrac{7}{2}\dfrac{1}{x+\frac{3}{2}}+3$

Possiamo ottenere il grafico di questa funzione a partire da $y=\dfrac{1}{x}$ utilizzando, ad esempio, la seguente trasformazione:

un'affinità di rapporti *m*=1, *n*=-7/2 ed una traslazione di moduli *p*=-3/2 e *q*=3.

$$y=\frac{1}{x}\xrightarrow{a\left(1,-\frac{7}{2}\right)}y=-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x}\xrightarrow{t\left(-\frac{3}{2},3\right)}y=-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+3$$




4. Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

- $f(x)=x^2+4$ : è una funzione pari, poiché $f(-x)=(-x)^2+4=x^2+4=f(x)$
- $f(x)=5\cdot x^3$: è una funzione dispari, poiché $f(-x)=5\cdot(-x)^3=-5\cdot x^3=-f(x)$
- $f(x)=x^2+x+1$: non è né pari né dispari, poiché $f(-x)=(-x)^2+(-x)+1=x^2-x+1\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}$