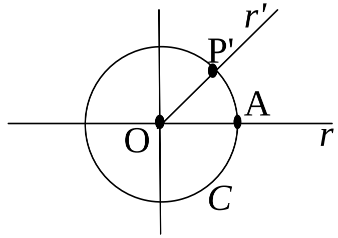
FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

RICHIAMI DI TEORIA

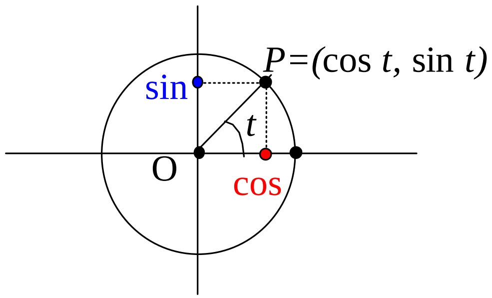
Definizione: *si dice* **angolo positivo** *individuato dalla coppia di semirette r e r' uscenti dal punto O, l'insieme dei punti del piano descritti dai punti di r nella rotazione antioraria che porta r a sovrapporsi con r'.*

Definizione: *si dice* **misura in radianti** *dell'angolo positivo (r,r') il numero reale* $t = \frac{\text{misura dell'arco AP}'}{\text{raggio di C}}$

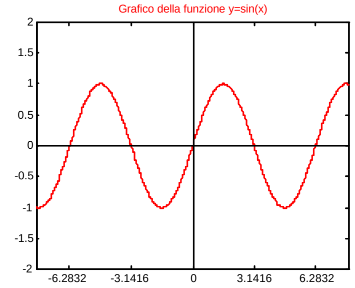
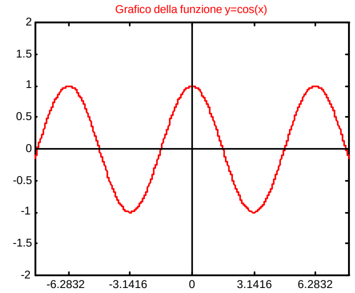
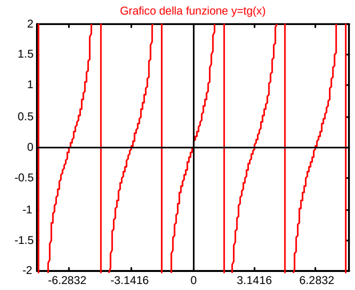


Definizione: *una* **funzione** *f reale di variabile reale è detta* **periodica** *di periodo T se per ogni t Î dom f risulta anche t+T Î dom f* e $f(t) = f(t+T)$.

Definizione: *Consideriamo la circonferenza goniometrica (circonferenza di centro l'origine e raggio 1). Consideriamo un punto P su di essa e l'angolo t formato dal raggio OP e dall'asse delle ascisse. L'ascissa e l'ordinata del punto P sono rispettivamente il* **coseno** *ed il* **seno** *dell'angolo t:* $P = (\cos t, \sin t)$.



Definizione: *la funzione* **tangente** *è definita come* $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ per $t \neq \frac{p}{2} + kp, k \in \mathbf{Z}$. *Geometricamente rappresenta l'ordinata del punto di intersezione tra la retta parallela all'asse delle ordinate e passante per A=(1,0) con la retta congiungente l'origine con il punto P=* (cos *t,* sin *t).*

	dom f	*im f*	periodo	grafico
$f(x) = \sin x$	$\mathbf{R}$	[-1 1]	2π	
$f(x) = \cos x$	$\mathbf{R}$	[-1 1]	2π	
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\mathbf{R} - \{x : x = p / 2 + kp, k \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	π	

Formule trigonometriche fondamentali

- **Angoli notevoli**

a	*sin a*	*cos a*	*tg a*
0	0	1	0
π/2	1	0	∄
π	0	-1	0
3π/2	-1	0	∄
π/6	1/2	√3/2	1/√3
π/4	1/√2	1/√2	1
π/3	√3/2	1/2	√3

- **Relazione fondamentale:** $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

- **Archi associati**

$$\cos(p + t) = -\cos t \qquad \sin(p + t) = -\sin t \qquad \mathrm{tg}(p + t) = \mathrm{tg}\, t$$

$$\cos(\text{-}t) = \cos(2p - t) = \cos t \qquad \sin(\text{-}t) = \sin(2p - t) = -\sin t \qquad \mathrm{tg}(\text{-}t) = -\mathrm{tg}\, t$$

$$\cos(p - t) = -\cos t \qquad \sin(p - t) = \sin t \qquad \mathrm{tg}(p - t) = -\mathrm{tg}\, t$$

$$\cos\left(\frac{p}{2} + t\right) = -\sin t \qquad \sin\left(\frac{p}{2} + t\right) = \cos t \qquad \mathrm{tg}\left(\frac{p}{2} + t\right) = -\frac{\cos t}{\sin t} = \text{-cotg}\, t$$

$$\cos\left(\frac{p}{2} - t\right) = \sin t \qquad \sin\left(\frac{p}{2} - t\right) = \cos t \qquad \mathrm{tg}\left(\frac{p}{2} - t\right) = \mathrm{cotg}\, t$$

© **Politecnico di Torino**

- **Formule di addizione:**

$$\cos(t_1 - t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2$$

$$\cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2$$

$$\sin(t_1 - t_2) = \sin t_1 \cos t_2 - \sin t_2 \cos t_1$$

$$\sin(t_1 + t_2) = \sin t_1 \cos t_2 + \sin t_2 \cos t_1$$

$$\mathrm{tg}(t_1 - t_2) = \frac{\mathrm{tg}t_1 - \mathrm{tg}t_2}{1 + \mathrm{tg}t_1 \cdot \mathrm{tg}t_2}$$

$$\mathrm{tg}(t_1 + t_2) = \frac{\mathrm{tg}t_1 + \mathrm{tg}t_2}{1 - \mathrm{tg}t_1 \cdot \mathrm{tg}t_2}$$

- **Formule di duplicazione**

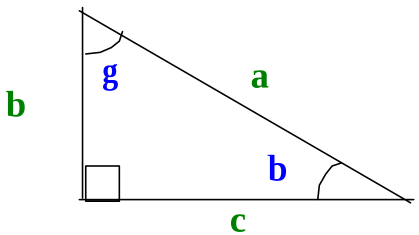
$$\sin 2t = 2 \cdot \sin t \cos t$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\mathrm{tg} 2t = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}t}{1 - \mathrm{tg}^2 t}$$

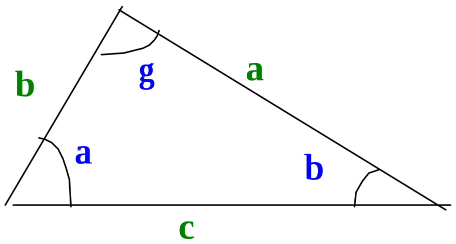
Proprietà dei triangoli

- **Triangoli rettangoli**



$$b = a \cdot \sin \boldsymbol{b} = a \cos g$$
$$c = a \cdot \sin g = a \cos \boldsymbol{b}$$
$$b = c \cdot \mathrm{tg}\, \boldsymbol{b}$$
$$c = b \cdot \mathrm{tg}\, g$$

- **Triangoli qualunque**



Teorema dei seni: *in un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti:* $\dfrac{a}{\sin \boldsymbol{a}} = \dfrac{b}{\sin \boldsymbol{b}} = \dfrac{c}{\sin g}$.

Teorema di Carnot: *in un triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure dei due altri lati diminuito del doppio del prodotto delle misure di questi due lati moltiplicato per il coseno dell'angolo da essi formato:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \boldsymbol{a}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \boldsymbol{b}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos g$$

© **Politecnico di Torino**
Data ultima revisione 11/05/00

ESEMPI

1. *Calcolare il valore dell'espressione* $\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{5}{6}\pi + \sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{11}{6}\pi$.

Osservando che $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}; \frac{11}{6}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, utilizzando gli archi associati e gli angoli notevoli otteniamo:

$$\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{5}{6}\pi + \sin\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{11}{6}\pi = \sin\frac{\pi}{3} - 2\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{\pi}{6} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2. *Calcolare l'espressione* $\dfrac{\cos(\pi - \alpha) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin(-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\alpha)}$.

Utilizzando gli archi associati, otteniamo:

$$\frac{\cos(\pi - \alpha) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin(-\alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \sin(\alpha)}{-\operatorname{tg}\alpha - \sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = 1$$

© **Politecnico di Torino**

3. *Semplificare l'espressione* $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}+\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Utilizzando la relazione fondamentale e le formule di duplicazione otteniamo:

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

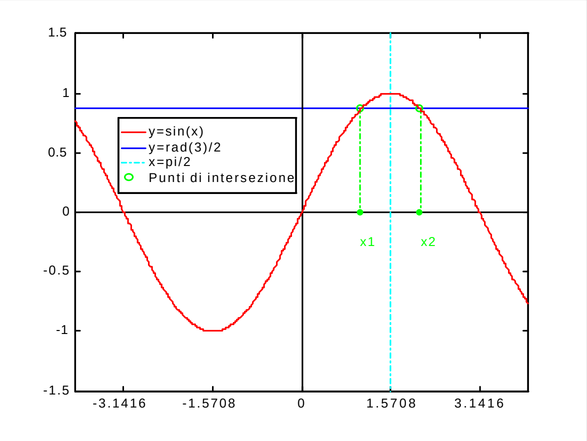
4. *Risolvere in* **R** *le seguenti* **equazioni elementari**:

- $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

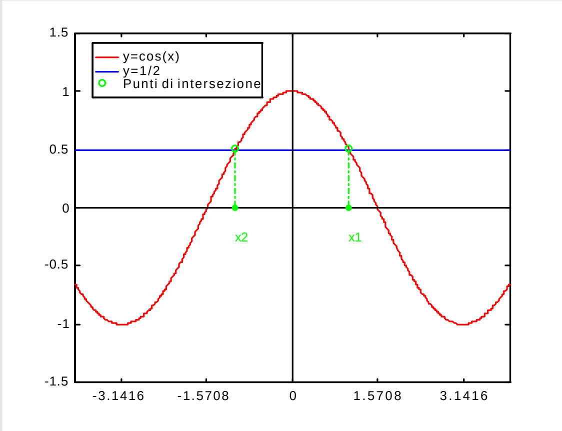
Dal punto di vista geometrico dobbiamo determinare i punti di intersezione tra la funzione seno e la retta $y=\sqrt{3}/2$ (esistono punti di intersezione in quanto $-1<\sqrt{3}/2<1$). Risolviamo l'equazione nell'intervallo $[-\pi\ \pi]$: tutte le altre soluzioni si otterranno da quelle trovate in tale intervallo per periodicità.
Indicando con x_1 la soluzione contenuta nell'intervallo $[-\pi/2\ ,\ \pi/2]$, la seconda soluzione x_2 è la simmetrica di x_1 rispetto alla retta $x=\pi/2$: $x_2=\pi-x_1$.

Abbiamo $x_1=\dfrac{\pi}{3}$ e $x_2=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$.

Le soluzioni in **R** sono: $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ e $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, con $k\in$ **Z**.



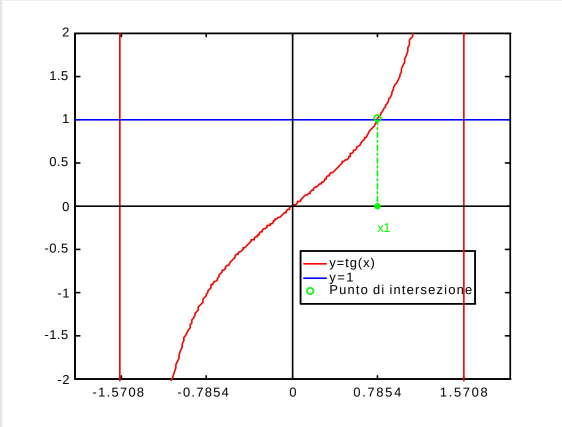
- $\cos x = \frac{1}{2}$



Dal punto di vista geometrico dobbiamo determinare i punti di intersezione tra la funzione coseno e la retta $y=1/2$ (esistono punti di intersezione in quanto $-1<1/2<1$). Risolviamo l'equazione nell'intervallo [-π π]: tutte le altre soluzioni si otterranno da quelle trovate in tale intervallo per periodicità.
Indicando con x_1 la soluzione contenuta nell'intervallo [0, π], la seconda soluzione x_2 è la simmetrica di x_1 rispetto alla retta $x=0$ $x_2=-x_1$. Abbiamo $x_1=\frac{\pi}{3}$ e $x_2=-\frac{\pi}{3}$.

Le soluzioni in **R** sono: $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ e $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$.

- $\text{tg}\, x = 1$



Dal punto di vista geometrico dobbiamo determinare i punti di intersezione tra la funzione tangente e la retta $y=1$.
Risolviamo l'equazione nell'intervallo [-π/2 π/2]: tutte le altre soluzioni si otterranno da quelle trovate in tale intervallo per periodicità.
L'equazione ha una sola soluzione x_1 nell'intervallo [-π/2, π/2].

Abbiamo $x_1=\frac{\pi}{4}$. Le soluzioni in **R** sono: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, con $k\in \mathbf{Z}$.

© **Politecnico di Torino**

5. *Risolvere le seguenti equazioni:*

- $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

E' semplice verificare che si ha $\sin\alpha=\sin\beta \leftrightarrow \alpha=\beta+2k\pi \cup \alpha=\pi-\beta+2k\pi$, con $k\in\mathbf{Z}$.
Quindi:

$$\begin{array}{c} 2x-\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \leftrightarrow x=\frac{7}{12}\pi+2k\pi \\ \cup \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \leftrightarrow x=\frac{11}{36}\pi+k\frac{2}{3}\pi \end{array}\text{, con } k\in\mathbf{Z}.$$

- $\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\cos(3x-\pi)$

In generale si ha $\cos\alpha=\cos\beta \leftrightarrow \alpha=\beta+2k\pi \cup \alpha=-\beta+2k\pi$,con $k\in\mathbf{Z}$. Quindi

$$\begin{array}{c} x-\frac{\pi}{5}=3x-\pi+2k\pi \leftrightarrow x=\frac{2}{5}\pi+k\pi \\ \cup \\ x-\frac{\pi}{5}=-3x+\pi+2k\pi \leftrightarrow x=\frac{3}{10}\pi+k\frac{\pi}{2} \end{array}\text{, con } k\in\mathbf{Z}.$$

6. *Risolvere in* **R** *l'equazione* $\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 = 0$

Le equazioni della forma $a\sin x + b\cos x = c$ con $a, b, c \in \mathbf{R}$ sono dette **equazioni lineari in seno e coseno**.
Vi sono diversi modi per risolverle: descriviamo quello che si basa sull'idea di scriverle sotto la forma

$$\sin(x+\alpha) = h \leftrightarrow \sin x \cos\alpha + \sin\alpha \cos x = h\,.$$

Dobbiamo fare in modo che i coefficienti del seno e del coseno siano in modulo minori di 1, al fine di poterli considerare seno e coseno di uno stesso angolo α. Per comodità possiamo supporre quest'ultimo compreso tra 0 e 2π. Dividiamo, quindi, ambo i membri dell'equazione per la quantità non nulla $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$: $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$.

Quindi deve essere $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ e l'equazione diventa:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2} \leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \leftrightarrow \begin{array}{c} x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \cup \\ x+\frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}, \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

7. *Risolvere in* **R** *l'equazione* $5\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$

Si tratta di un' **equazione omogenea di secondo grado in seno e coseno**, che, in generale, ha la forma

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$, con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

Possiamo ricondurci ad una equazione con secondo membro nullo grazie alla relazione fondamentale:

$$5\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2 \leftrightarrow 5\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \leftrightarrow 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Dividendo ambo i membri per $\cos^2 x$ (si verifica facilmente che, se $a \neq d$, gli x per cui cos $x=0$ non sono soluzioni), otteniamo:

$$3\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} - 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \leftrightarrow 3\mathrm{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\mathrm{tg}x - 3 = 0 \xleftrightarrow{\mathrm{tg}x = t} 3t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 = 0 \leftrightarrow t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cup t = \sqrt{3}$$

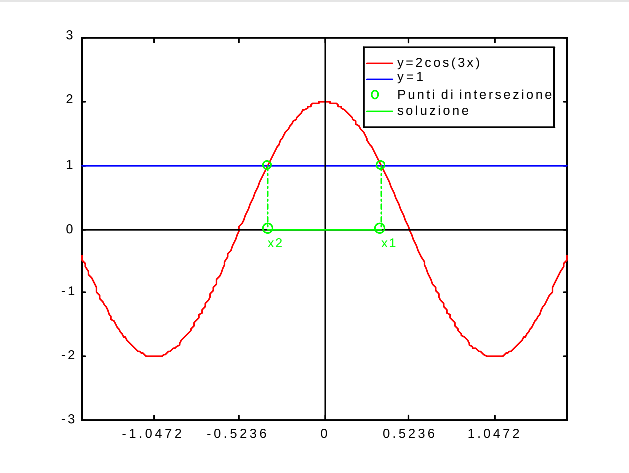
Quindi
$$tg\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \cup \quad tg\,x = \sqrt{3} \leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$
, con $k \in \mathbf{Z}$.

© **Politecnico di Torino**

8. *Risolvere in* **R** *la disequazione* $2\cos(3x) > 1$

Risolviamo la disequazione in modo grafico, disegnando la funzioni $f(x) = 2\cos(3x)$ e la retta $y = 1$.

Osserviamo che *f(x)* è una funzione periodica di periodo *T=2p/3*: possiamo dunque limitare lo studio all'intervallo [-π/3 π/3] di ampiezza *T*.



Otteniamo il grafico di *f(x)* a partire dal grafico di *y*=cos *x* con una dilatazione *d(1/3,2).*

La soluzione della disequazione nell'intervallo [-π/3 π/3] è $x_2 < x < x_1$.

x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione $2\cos(3x) = 1$ in [-π/3 π/3]:

$$x_1 = \frac{p}{9} \text{ e } x_2 = -\frac{p}{9}.$$

La soluzione della disequazione in **R** è $\left\{x : -\frac{p}{9} + k\frac{2}{3}p < x < \frac{p}{9} + k\frac{2}{3}p, k \in \mathbf{Z}\right\}$

© **Politecnico di Torino**