INSIEMI, RETTA REALE E PIANO CARTESIANO

RICHIAMI DI TEORIA SUGLI INSIEMI

Un insieme E è definito assegnando i suoi elementi, tutti distinti tra loro:
se *x* è un elemento di E scriviamo $x \in E$, mentre, se non lo è, si scrive $x \notin E$.

Definizione: *dato un insieme I, si dice che E è un* **sottoinsieme** *di I e si scrive* $E \subseteq I$ *se ogni elemento di E è anche un elemento di I. Se inoltre esiste almeno un elemento di I che non appartiene a E, si dice che E è un* **sottoinsieme proprio** *di I e si scrive* $E \subset I$.

Definizione: *dati due insiemi A e B, si definiscono i seguenti insiemi:*

- *insieme* **unione** = $A \cup B$ — *è l'insieme degli x che appartengono ad A oppure appartengono a B;*
- *insieme* **intersezione** = $A \cap B$ — *è l'insieme degli x che appartengono ad A e a B;*
- *insieme* **differenza** = $A \setminus B$ — *è l'insieme degli x che appartengono ad A e non appartengono a B*
- *insieme* **differenza simmetrica** = $A \Delta B$ — *è l'insieme degli x che appartengono ad A e non appartengono a B oppure che appartengono a B e non appartengono ad A.*

Definizione*: Dato un insieme* $A \subseteq M$, *si dice* **complementare** *di A (rispetto a M) e si scrive* $\overline{A}$ *l'insieme* $M \setminus A$.

Definizione: *l'insieme dei sottoinsiemi di E si chiama* **insieme potenza** *o* **insieme delle parti** *di E e si indica con* $P(E)$.

Definizione: *dati due insiemi A e B si dice* **prodotto cartesiano** *di A e B e si indica con* $A \times B$ *l'insieme delle coppie ordinate* (a,b) *con* $a \in A$ *e* $b \in B$.

ESEMPI

1. Scrivere in notazione insiemistica l'insieme dei numeri pari e l'insieme dei numeri dispari.

Possiamo descrivere gli insiemi richiesti in due modi differenti:

- Elencandone gli elementi

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots\} \ , \ D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\ldots\}$$

- Utilizzando la loro **proprietà caratteristica**, vale a dire considerandoli come collezione di tutti gli elementi che appartengono ad un certo insieme più grande che soddisfano una certa proprietà.

$$P = \{x \in \mathbf{N} : x = 2n,\ n \in \mathbf{N}\} \ , \ D = \{x \in \mathbf{N} : x = 2n+1,\ n \in \mathbf{N}\}$$

2. *Determinare unione, intersezione e differenza degli insiemi* $A=\{x\in\mathbf{Z}: x\geq -3\}$ e $B=\{x\in\mathbf{N}: x<4\}$.

A è un sottoinsieme di $\mathbf{Z}$ ($A\subset\mathbf{Z}$) e contiene i numeri relativi che sono maggiori o uguali a -3, $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,....\}$,
B è un sottoinsieme di $\mathbf{N}$ ($B\subset\mathbf{N}$) e contiene i numeri naturali minori di 4, $B=\{0,1,2,3\}$.
Osserviamo che B è sottoinsieme proprio di A ($B\subset A$) e quindi:

$$A\cup B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,\dots\}=A$$

$$A\cap B=\{0,1,2,3\}=B$$

$$A\setminus B=\{x\in\mathbf{Z}: -3\leq x<0 \text{ e } x>3\}$$

3. *Determinare l'insieme delle parti degli insiemi* $A=\{x\in Z: x^3=-8\}$, $B=\{x\in\mathbf{Z}: x^2=1\}$. *e* $C=\{x\in\mathbf{N}: x\leq 2\}$.*Tenendo conto dei risultati ottenuti, quanti sono gli elementi dell'insieme delle parti di un insieme di n elementi?*

Gli insiemi *A*, *B*, e *C* contengono rispettivamente uno, due e tre elementi: $A=\{-2\}$, $B=\{-1,1\}$, $C=\{0,1,2\}$.

$P(A)=\{\emptyset,\{-2\}\}$ — *P(A)* ha 2 elementi

$P(B)=\{\emptyset,\{-1\},\{1\},\{-1,1\}\}$ — *P(B)* ha 4 = 2^2 elementi

$P(C)=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$ — *P(C)* ha 8 = 2^3 elementi

E' facile verificare che, in generale, se *E* è un insieme di *n* elementi, *P(E)* contiene 2^n elementi.

4.*Dati gli insiemi* $A=\{1,2,3\}$ *e* $B=\{3,4\}$ *determinare:* $A\times B,\ B\times A,\ A\times A,\ B\times B.$

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$$
$$B\times A=\{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$
$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$
$$B\times B=\{(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$$

Osserviamo che $A\times B\neq B\times A$ in quanto le coppie sono ordinate.
Per la stessa ragione nell'insieme $A\times A$ gli elementi $(1,2),(1,3),(2,3)$ sono distinti dagli elementi $(2,1),(3,1),(3,2)$ e nell'insieme $B\times B$ gli elementi $(3,4)$ e $(4,3)$ sono diversi.

RICHIAMI DI TEORIA SULLA RETTA REALE ED IL PIANO CARTESIANO

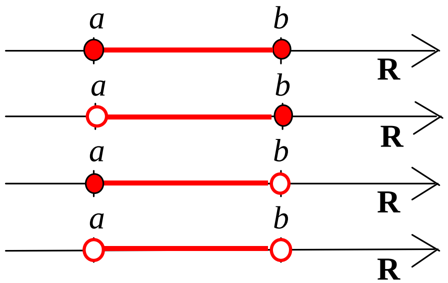
Gli intervalli della retta reale

$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}: a\le x\le b\}$

$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}: a< x\le b\}$

$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a\le x< b\}$

$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a< x< b\}$

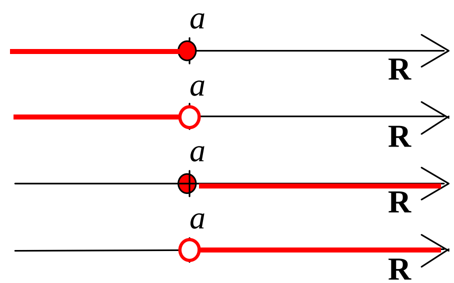


$(-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}: x\le a\}$

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbf{R}: x< a\}$

$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x\ge a\}$

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x> a\}$



Definizione: *fissato un punto P sulla retta reale la misura del segmento OP è data da x se x>0, da -x se x <0 ed è uguale a zero se P coincide con O: questa misura viene definita* **valore assoluto** *del numero reale x ed è indicata con* $|x|$.

Formalmente: $|x|=\begin{cases}-x & \text{per } x<0\\ x & \text{per } x\ge 0\end{cases}$

Distanza tra due punti P_1 e P_2 nel piano: $d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ dove $P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2)$

Punto medio del segmento $P_1\,P_2$: $M=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ dove $P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2)$

Equazione della retta in forma esplicita: $y=mx+q$ dove m è il **coefficiente angolare** e q l'intersezione della retta con l'asse y.

Equazione della retta in forma implicita: $ax+by+c=0$ dove $a,b,c\in\mathbf{R}$

Equazione della retta passante per due punti P_1 e P_2 : $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ dove $P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2)$

Condizione di parallelismo tra due rette: le rette $r: y=m_1x+q_1$ e $s: y=m_2x+q_2$ sono parallele se e solo se $m_1=m_2$

Condizione di perpendicolarità tra due rette: le rette $r: y=m_1x+q_1$ e $s: y=m_2x+q_2$ sono perpendicolari se e solo se $m_1 m_2=-1$.

Definizione: *fissato un punto* $C(x_0,y_0)$ *del piano e un numero reale positivo* r *, si dice* **circonferenza** *di centro C e raggio r il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza r da C. L'equazione è la seguente:* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Definizione: *fissati due punti* F *e* F' *del piano, detti* **fuochi***, e un numero reale positivo* $2a$ *, con* $2a>d(F,F')$*, si dice* **ellisse** *il luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante (e uguale a* $2a$ *,) la somma delle distanze dai fuochi.*

Se i fuochi hanno coordinate $F=(c,0)$ e $F'=(-c,0)$ l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dove $b^2=a^2-c^2$.

Se i fuochi hanno coordinate $F=(0,c)$ e $F'=(0,-c)$ l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ dove $b^2=a^2-c^2$.

Definizione: *fissati due punti F e F' del piano, detti* **fuochi**, *e un numero reale positivo $2a$, con $2a < d(F, F')$, si dice* **iperbole** *il luogo geometrico dei punti del piano per cui è costante (e uguale a $2a$,) la differenza delle distanze dai fuochi.*

Se i fuochi hanno coordinate $F=(c,0)$ e $F'=(-c,0)$ l'equazione dell'iperbole è $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dove $b^2=c^2-a^2$.

Se i fuochi hanno coordinate $F=(0,c)$ e $F'=(0,-c)$ l'equazione dell'iperbole è $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ dove $b^2=c^2-a^2$.

Se i fuochi hanno coordinate $F=(a,a)$ e $F'=(-a,-a)$ l'equazione dell'iperbole è $xy=\frac{a^2}{2}$.

Definizione: *fissata una retta r, detta* **direttrice**, *e un punto $F \notin r$, detto* **fuoco**, *si dice* **parabola** *il luogo geometrico dei punti del piano che hanno uguale distanza da F e da r.*

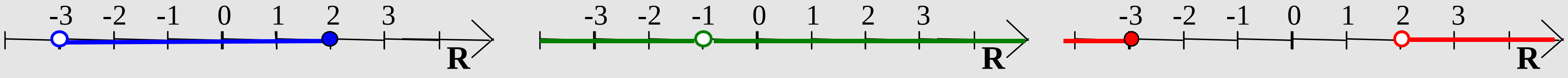
Se il fuoco ha coordinate $F=(0,p)$ e la direttrice ha equazione $y=-p$ l'equazione della parabola è $y=\frac{1}{4p}x^2=ax^2$.

Se il fuoco ha coordinate $F=(p,0)$ e la direttrice ha equazione $x=-p$ l'equazione della parabola è $x=\frac{1}{4p}y^2=ay^2$.

ESEMPI

1. *Dati gli insiemi* $A=\{x \in \mathbf{R}: -3 < x \leq 2\}$, $B=\mathbf{R}-\{-1\}$ *e* $C=\{x \in \mathbf{R}: x \leq -3 \; e \; x > 2\}$ *, rappresentarli sulla retta reale, esprimerli come intervalli e determinare* $A \cup B, A \cap B, A \cup C, A \cap C, B \cup C, B \cap C$.

$A = (-3, 2]$ **$B = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$** **$C = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$**



$A \cup B = \mathbf{R}$: osserviamo che *-3* $\notin A$ ma *-3* $\in B$, quindi *-3* $\in A \cup B$ e che *-1* $\notin B$, ma *-1* $\in A$, quindi *-1* $\in A \cup B$.

$A \cap B = (-3, -1) \cup (-1, 2]$

Osservando che C è il complementare di A rispetto a **R**, vale a dire $C = \mathbf{R} \setminus A$, abbiamo $A \cup C = \mathbf{R}$ e $A \cap C = \emptyset$.

Osservando che $C \subset B$, abbiamo $B \cup C = B$ e $B \cap C = C$.

2. *Disegnare le rette di equazione* $y = kx + 1$ (1) *essendo* $k \in \{z \in \mathbf{Z}: -4 \leq z \leq 4\}$. *Che caratteristica hanno tutte queste rette?*

Osserviamo che tutte le rette passano per il punto $P(0,1)$ (si può facilmente verificare che le coordinate di P soddisfano l'equazione (1) per qualsiasi valore del parametro k).

L'equazione (1) rappresenta un fascio proprio di rette di centro P: al variare di k in **R** otteniamo tutte le rette passanti per P, tranne la retta per P perpendicolare all'*asse x* (in questo caso la retta di equazione $x=0$), che non si può ottenere dalla (1) per nessun valore di k

In generale l'equazione di un **fascio proprio di rette** con centro $P_0=(x_0,y_0)$ è $y-y_0=k(x-x_0)$ (2): essa rappresenta, al variare di k in **R,** tutte le rette passanti per P_0 tranne la retta di equazione $x=x_0$ passante per P_0 e perpendicolare all'*asse x*.
Se il valore di k è fissato, la (2) rappresenta l'equazione della retta passante per il punto P_0 di coefficiente angolare noto k.

3. *Disegnare le rette di equazione* $y=2x+k$ (2) *essendo* $k\in\{z\in\mathbf{Z}:-4\le z\le 4\}$. *Che caratteristica hanno tutte queste rette?*

Osserviamo che tutte le rette hanno lo stesso coefficiente angolare $m = 2$ (quindi si tratta di rette parallele), mentre la loro intersezione con l'*asse y* dipende dal valore assegnato di volta in volta al parametro k.
L'equazione (2) rappresenta un fascio di rette parallele o fascio improprio.
In generale l'equazione di un **fascio improprio di rette** di coefficiente angolare fissato $\overline{m}$ è $y=\overline{m}x+k$.

4. *Sono assegnati i punti* $P_1(1,-2), P_2(-5,6), P_3(2/3,4)$. *Verificare che il triangolo* $P_1P_2P_3$ *è isoscele e determinare la sua area.*

Il triangolo è isoscele se ha due lati uguali. Calcoliamo la lunghezza dei lati utilizzando la formula della distanza tra due punti:

$$P_1P_2=\sqrt{(1-(-5))^2+(-2-6)^2}=10 \qquad P_1P_3=\sqrt{(1-2/3)^2+(-2-4)^2}=5\sqrt{13}/3 \;=\; P_2P_3=\sqrt{(-5-2/3)^2+(6-4)^2}=5\sqrt{13}/3$$

L'altezza del triangolo è il segmento congiungente il punto medio M della base P_1P_2 con il vertice P_3. Abbiamo:

$$M=\left(\frac{1-5}{2},\frac{-2+6}{2}\right)=(-2,2)\ ,\ MP_3=\sqrt{(-2-2/3)^2+(2-4)^2}=\frac{10}{3}\ \text{ e }\ Area=\frac{P_1P_2\cdot MP_3}{2}=\frac{50}{3}$$

5. *Dati i punti* $P_1(-2,1), P_2(-1,3), P_3(2,4)$, *determinare l'equazione della retta r passante per* P_1 *e* P_2 *e la distanza tra r e* P_3..

Equazione di r: $\frac{x-(-2)}{-1-(-2)} = \frac{y-1}{3-1} \leftrightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} \leftrightarrow y = 2x+5$

Distanza tra P_3 e r:

- determiniamo la retta $s \perp r$ passante per P_3, utilizzando l'equazione della retta passante per un punto di coefficiente angolare noto (sappiamo infatti che $m_s = -1/m_r = -1/2$): s: $y-4 = -1/2(x-2) \leftrightarrow s$: $y = -1/2\,x+5$.
- determiniamo il punto di intersezione $P(x,y)$ tra r e s: il punto P deve appartenere ad entrambe le rette, quindi le sue coordinate devono soddisfare contemporaneamente le equazioni di r: $y = 2x+5$ e s: $y = -1/2\,x+5$. Per confronto, otteniamo $2x+5 = -1/2\,2x+5 \leftrightarrow x = 0$; il valore $y = 5$ si ricava andando a sostituire in una delle equazioni $x=0$: quindi $P = (0,5)$.
- La misura del segmento $PP_3 = \sqrt{5}$ fornisce la distanza richiesta.

6. *Determinare l'equazione della circonferenza di diametro AB, dove* $A = (1,3)$ *e* $B = (2,2)$.

Il centro C della circonferenza è il punto medio tra A e B: $C = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Il raggio r è dato, ad esempio, dalla misura del segmento $AC = \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}$

L'equazione della circonferenza è: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{36}$

7. *Determinare le coordinate del centro ed il raggio della circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 3 = 0$.

Dobbiamo ricondurci ad una equazione del tipo $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, manipolando algebricamente l'espressione data completando i quadrati. Ricordiamo che $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 3 = x^2 - 6x + y^2 + 2y + 3 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + 3 = (x-3)^2 + (y+1)^2 - 7 = 0$ e quindi

$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{7})^2$ equazione di una circonferenza di centro *C(3,-1)* e raggio *r=Ö7*

8. *Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti A(-1, 2) e B(1, 4) ed avente il centro sulla retta r: y=5x.*

Il centro C della circonferenza è il punto di intersezione tra la retta *r* e l'asse della corda AB.

Ricordiamo che l'**asse di un segmento** è il luogo dei punti *P(x,y)* equidistanti dagli estremi del segmento dato; determiniamo l'asse *a* del segmento AB:

$PA = PB \leftrightarrow \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \leftrightarrow$
$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 \leftrightarrow x + y - 3 = 0.$

Il punto C intersezione tra le rette r e a è $C=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Il raggio è dato, ad esempio, dalla misura del segmento $AC=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

L'equazione della circonferenza è: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

9. *Determinare la lunghezza dei semiassi e le coordinate dei fuochi dell'ellisse di equazione* $4x^2+9y^2=16$.

Dobbiamo scrivere l'ellisse nella forma canonica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$4x^2+9y^2=16 \leftrightarrow \frac{4}{16}x^2+\frac{9}{16}y^2=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{(2)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=1$, quindi $a=2, b=\frac{4}{3}$, $c^2=a^2-b^2=\frac{20}{9} \leftrightarrow c=\frac{2}{3}\sqrt{5}$

I fuochi si trovano sull'*asse x* ed hanno coordinate $F=\left(\frac{2}{3}\sqrt{5},0\right)$, $F'=\left(-\frac{2}{3}\sqrt{5},0\right)$

10.Scrivere l'equazione dell'iperbole passante per il punto $A=(2,2)$ *ed avente i fuochi nei punti* $F=(-2,0), F'=(2,0)$.
Determinare inoltre le equazioni dei suoi asintoti.

I fuochi sono sull'*asse x* e sono simmetrici rispetto all'origine, quindi l'equazione dell'iperbole è $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Possiamo ricavare la misura dell'asse traverso applicando la definizione di iperbole come luogo di punti: infatti se A appartiene alla curva dovrà essere: $AF - AF' = 2a$.

Abbiamo $AF=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ e $AF'=2$, da cui $2a=2\sqrt{5}-2 \leftrightarrow a=\sqrt{5}-1$.

Il semiasse non traverso b si ricava usando la relazione $b^2=c^2-a^2=4-\left(5-2\sqrt{5}+1\right)=2(\sqrt{5}-1) \leftrightarrow b=\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$.

Gli **asintoti** sono le rette di equazione $y=\pm\frac{b}{a}x \leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}-1\right)}}{\sqrt{5}-1}x$.