POLINOMI

RICHIAMI DI TEORIA

Definizione: *un* **polinomio** *(o* **funzione polinomiale***) nella variabile x di grado n a coefficienti reali ha la forma* $A_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n1} x^n$*, dove* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sono numeri reali assegnati e* $a_n \neq 0$*. Ogni singolo addendo* $a_k x^k$ *si dice* **monomio** *di grado k ed il numero* a_k *si dice coefficiente del termine di grado k. Il* **grado** *di un polinomio è determinato dalla massima potenza di x il cui coefficiente è non nullo.*

Proposizione (**Principio di identità dei polinomi*****):*** *due polinomi sono uguali se hanno lo stesso grado e hanno ordinatamente uguali i coefficienti dei monomi di uguale grado.*

Definizione: *dati due polinomi* $A_n(x)$ *e* $B_m(x)$*, la funzione* $f(x) = \dfrac{A_n(x)}{B_n(x)}$ *viene detta* **funzione razionale** *(o* **funzione razionale fratta***); essa è definita in tutto* **R** *esclusi gli eventuali punti x in cui* $B_m(x) = 0$.

Teorema: *siano* $A_n(x)$ *e* $B_m(x)$ *due polinomi, rispettivamente di grado n ed m, con* $n \geq m$*. Esistono due polinomi* $Q(x)$ *e* $R(x)$ *tali che :*

- *il grado di* $R(x)$ *è strettamente minore di m;*
- *vale la relazione* $A_n(x) = B_m(x) \cdot Q(x) + R(x)$*. (1)*

Il polinomio $Q(x)$*, di grado n-m, è detto* **quoziente** *della divisione e il polinomio* $R(x)$ **resto** *della divisione.*

Definizione: *se nella relazione (1) il polinomio* $R(x)$ *è il polinomio nullo allora si dice che* $A_n(x)$ *è* **divisibile** *per* $B_m(x)$ *o che* $B_m(x)$ *è* **divisore** *di* $A_n(x)$.

Teorema: *condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio* $A_n(x)$ *sia divisibile per* $x-c$ *è che* $A_n(c)=0$.*(2)*

Definizione: *un numero c tale che* $A_n(c)=0$ *è detto* **radice** *o* **zero** *del polinomio* $A_n(x)$. *Le radici di* $A_n(x)$ *si dicono anche* **radici** *o* **soluzioni** *dell'equazione* $A_n(x)=0$.

Definizione: *un polinomio* $A_n(x)$ *di grado* $n \geq 1$ *si dice* **irriducibile** *se non esiste nessun divisore di* $A_n(x)$ *che abbia grado m con 0<m<n.*

Teorema: *nell'insieme dei polinomi a coefficienti reali vi sono due tipi di fattori irriducibili: i binomi di primo grado e i trinomi di secondo grado a discriminante negativo. Ogni polinomio ammette una fattorizzazione del tipo*

$$A_n(x)=a_n(x-c_1)^{m_1}\cdots(x-c_k)^{m_k}\cdots\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdots\left(x^2+p_hx+q_h\right)^{l_h} \quad (3)$$

I numeri $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *sono le radici reali distinte di* $A_n(x)$ *di molteplicità, rispettivamente,* $m_1, m_2, \ldots, m_k$, *mentre i trinomi di secondo grado della (3) hanno discriminante negativo e vale la relazione* $m_1+m_2+\cdots+m_k+2l_1+\cdots 2l_h=n$.

ESEMPI

Ricordiamo che:

- $a_k x^k + b_k x^k = (a_k + b_k) x^k$ somma di due monomi di uguale grado (**monomi simili**)
- $a_k x^k - b_k x^k = (a_k - b_k) x^k$ differenza di due monomi di uguale grado
- $a_k x^k \cdot c_p x^p = a_k c_p x^{k+p}$ prodotto di due monomi
- $\dfrac{a_k x^k}{c_p x^p} = \dfrac{a_k}{c_p} x^{k-p}$ (se $k \geq p$ e $c_p \neq 0$) quoziente di due monomi

1. *Eseguire le seguenti operazioni tra polinomi*

- $\left(3x^3-2x^2+4\right)-2\left(5x^3+x^2-2x+3\right) = 3x^3-2x^2+4-10x^3-2x^2+4x-6 = (3-10)x^3+(-2-2)x^2+4x+(4-6) =$

  $= -7x^3-4x^2+4x-2.$

- $6x^2-\left\{6-4ax-\left[4+3x^2-ax-(5-2ax)+7x\right]\right\} = 6x^2-6+4ax+\left[4+3x^2-ax-5+2ax+7x\right] =$

  $= 6x^2-6+4ax+4+3x^2-ax-5+2ax+7x = (6+3)x^2+(4a-a+2a+7)x-6+4-5 = 9x^2+(5a+7)x-7$

- $-3x^2\cdot\left(x^4+2x^3-4x-3\right) = -3x^2\cdot x^4-3x^2\cdot 2x^3-3x^2\cdot(-4x)-3x^2\cdot(-3) = -3x^6-6x^5+12x^3+9x^2$

- $\left(2x^2-3x+2\right)\cdot(x-1) = 2x^2\cdot(x-1)-3x\cdot(x-1)+2\cdot(x-1) = 2x^3-2x^2-3x^2+3x+2x-2 = 2x^3-5x^2+5x-2$

- $(x-1)\cdot(2x-3)\cdot(3x-5) = \left(2x^2-3x-2x+3\right)\cdot(3x-5) = \left(2x^2-5x+3\right)\cdot(3x-5) = 6x^3-10x^2-25x^2+25x+9x-15 =$

  $6x^3-35x^2+34x-15.$

- $\dfrac{4x^5+3x^3-5x^2}{2x^2} = \dfrac{4x^5}{2x^2}+\dfrac{3x^3}{2x^2}-\dfrac{5x^2}{2x^2} = \dfrac{4}{2}x^{5-2}+\dfrac{3}{2}x^{3-2}-\dfrac{5}{2}x^{2-2} = 2x^3+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}$

Prodotti notevoli

- $(x+a)\cdot(x-a) = x^2 - a^2$ differenza di quadrati
- $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ quadrato di un binomio
- $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ cubo di un binomio
- $(x+a)\cdot(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$ somma di cubi
- $(x-a)\cdot(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$ differenza di cubi

2. *Calcolare i seguenti prodotti notevoli:*

- $(3x-4a)\cdot(3x+4a) = (3x)^2 - (4a)^2 = 9x^2 - 16a^2$
- $(2x-5)^2 = [2x+(-5)]^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot(-5) + (-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
- $(3x-2)^3 = [3x+(-2)]^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(-2) + 3(3x)(-2)^2 + (-2)^3 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
- $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 - 2^3 = x^3 - 8$
- $(2x+a)\cdot(4x^2 - 2ax + a^2) = (2x)^3 + a^3 = 8x^3 + a^3$

3. *Eseguire le seguenti divisioni applicando, se è possibile la regola di Ruffini.*

- $\left(3x^4-4x^3+7x^2-x+1\right)\div\left(x^2-x+1\right)$

Non è possibile applicare l'algoritmo di Ruffini, in quanto il polinomio divisore non è della forma $x-c$; eseguiamo, quindi, la divisione :

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4-4x^3+7x^2-x+1 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
3x^4-3x^3+3x^2 & 3x^2-x+3 \\ \cline{1-1}
//\ \ -x^3+4x^2-x+1 & \\
\quad -x^3+x^2\quad -x & \\ \cline{1-1}
\quad //\quad 3x^2\quad //\ +1 & \\
\quad\quad 3x^2-3x+3 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad //\ \ +3x-2 &
\end{array}
$$

$Q(x)=3x^2-x+3,\ \ R(x)=3x-2$.

1. I polinomi $A_4(x)$ (dividendo) e $B_2(x)$ (divisore) sono ordinati secondo potenze decrescenti.
2. Calcoliamo il quoziente tra i monomi di grado massimo di $A_4(x)$ e $B_2(x)$: $3x^4/x^2=3x^2$.
3. Calcoliamo il prodotto $3x^2 \times B_2(x) = 3x^4-3x^3+3x^2$.
4. Calcoliamo $R_3(x) = A_4(x)- 3x^2\times B_2(x)= -x^3+4x^2-x+1$.
5. Ripetiamo il procedimento dividendo il monomio di grado più elevato di $R_3(x)$ con il monomio di grado massimo di $B_2(x)$, ottenendo il quoziente parziale $Q_1(x)= -x$ ed il resto parziale $R_2(x) = 3x^2+1$.
6. L'algoritmo termina quando il grado del resto ottenuto è minore del

- $\left(x^3 - 7x + 6\right) \div \left(x + 1\right)$

Il polinomio divisore è di primo grado, riconducibile alla forma $(x - c)$: $(x + 1) = (x - (-1))$; possiamo, quindi, effettuare la divisione utilizzando l'algoritmo di Ruffini :

coefficienti del dividendo | termine noto

	1	0	-7	6
c = -1	↓	-1	1	6
	1	-1	-6	12

coefficienti quoziente
$Q(x) = x^2 - x - 6$

resto
$R = 12$

4. *Scrivere la seguente funzione razionale come somma di un polinomio e di una funzione razionale il cui numeratore ha grado minore del denominatore.*

$$f(x)=\frac{3x^5+10x^3+x^2+3}{x^3-2}$$

Consideriamo la funzione razionale $f(x)=\dfrac{A_n(x)}{B_n(x)}$ e supponiamo $n \geq m$.

Dalla la relazione

$$A_n(x)=B_m(x)\cdot Q(x)+R(x)$$

dividendo ambo i membri per $B_m(x)$, otteniamo:

$$f(x)=\frac{A_n(x)}{B_m(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B_m(x)}$$

dove il grado di *R(x)* è minore di *m*.

Nel nostro caso $A_5(x)=3x^5+10x^3+x^2+3$ e $B_3(x)=x^3-2$.

Dividendo A_5 per B_3, otteniamo $Q(x)=3x^2+10$ e $R(x)=7x^2+23$

Quindi : $f(x)=3x^2+10+\dfrac{7x^2+23}{x^3-2}$

5. *Dire se il polinomio* $A_4(x) = 12x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 14x + 8$ *è divisibile per i seguenti polinomi di primo grado:*

- $(x-3)$

Applicando il teorema (2), abbiamo:

$$A_4(3) = 12(3)^4 - 11(3)^3 + 5(3)^2 - 14(3) + 8 = 972 - 297 + 45 - 42 + 8 = 686 \neq 0$$

A_4 non è divisibile per $(x-3)$

- $(x+1)$

$$A_4(-1) = 12(-1)^4 - 11(-1)^3 + 5(-1)^2 - 14(-1) + 8 = 12 + 11 + 5 + 14 + 8 = 50 \neq 0$$

A_4 non è divisibile per $(x+1)$

- $(x-1)$

$$A_4(1) = 12(1)^4 - 11(1)^3 + 5(1)^2 - 14(1) + 8 = 12 - 11 + 5 - 14 + 8 = 0$$

A_4 è divisibile per $(x-1)$

6. *Scomporre in fattori i seguenti polinomi*

- $\left(x^4+x^3+x^2\right) = x^2\left(x^2+x+1\right)$

Abbiamo effettuato un **raccoglimento a fattore totale**. Il trinomio di secondo grado $\left(x^2+x+1\right)$ è irriducibile avendo il discriminante $\Delta=-3$ negativo.

- $\left(x^3-3x^2-4x+12\right) = x^2\cdot(x-3)-4\cdot(x-3) = x^2\cdot(x-3)-4\cdot(x-3) = (x-3)\cdot\left(x^2-4\right) = (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$.

Abbiamo effettuato un **raccoglimento a fattore parziale** e, successivamente, abbiamo usato il prodotto notevole differenza di quadrati.

- x^6-64

Ricordiamo la seguente

Proposizione: *il binomio* x^n-a^n *è sempre divisibile per* $x-a$*; se n è pari è divisibile anche per* $x+a$.

Pertanto $x^6-64 = x^6-2^6$ risulta divisibile per $x-2$ e per $x+2$.

Possiamo scomporre il binomio utilizzando, ad esempio, l'algoritmo di Ruffini oppure vedendolo prima come differenza di quadrati e poi come somma e differenza di cubi:

$$\left(x^6-64\right)=\left(x^3-8\right)\cdot\left(x^3+8\right)=\left(x-2\right)\cdot\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(x+2\right)\cdot\left(x^2-2x+4\right)=\left(x-2\right)\cdot\left(x+2\right)\cdot\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(x^2-2x+4\right)$$

I trinomi di secondo grado sono irriducibili avendo entrambi il discriminante negativo.

- x^5+243

Ricordiamo la seguente:

Proposizione: *il binomio* x^n+a^n *è divisibile per* $x+a$ *; se n è dispari; se n è pari non è divisibile né per* $x-a$ *né per* $x+a$.

Pertanto $x^5+243 = x^5+3^5$ risulta divisibile per $x+3$. Eseguiamo la divisione con l'algoritmo di Ruffini:

	1	0	0	0	0	243
-3		-3	9	-27	81	-243
	1	-3	9	-27	81	0

$\boxed{Q(x)=x^4-3x^3+9x^2-27x+81}$ $\boxed{R=0}$

Quindi $x^5+243 = \left(x+3\right)\cdot\left(x^4-3x^3+9x^2-27x+81\right)$.

- $A_3(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$

Ricordiamo le seguenti regole :

Regola 1: *le eventuali radici intere di* $A_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$*, dove* $a_{n-1}, \ldots, a_0$ *sono interi, sono da cercare tra i sottomultipli di a0, compresa l'unità, presi sia con il segno positivo, sia con il segno negativo.*

Regola 2*: le eventuali radici razionali di* $A_n(x) = a^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$*, dove* $a_n, \ldots, a_0$ *sono interi, sono da cercare tra i razionali della forma* $\pm p / q$*, dove p è un sottomultiplo di* a_0*, compresa l'unità, mentre q è un sottomultiplo di* a_n*, compresa l'unità.*

Applicando la regola 1: i sottomultipli del termine noto a_0 = 21 sono ±1, ±3, ±7, ±21; Abbiamo $A_3(1) = 0$, $A_3(3) = 0$, $A_3(7) = 0$,

vale a dire 1, 3, 7 sono radici di A_3; quindi A_3 è divisibile per i polinomi di primo grado *x-1*, *x-3*, *x-7*:

$$x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = (x-1)(x-3)(x-7)$$