EQUAZIONI, DISEQUAZIONI E SISTEMI

RICHIAMI DI TEORIA

Definizione: *sia f una funzione reale di variabile reale. Gli elementi del dominio di f su cui la funzione assume valore nullo costituiscono l'* **insieme degli zeri della funzione***: determinarli significa risolvere l'* **equazione***, nell'incognita x,* $f(x) = 0$.
Gli elementi del dominio per cui f assume un prefissato valore reale k costituiscono l' **insieme di livello** *k della funzione.*
L' **insieme di positività** *della funzione è costituito dall'insieme degli x del dominio di f per cui risulta* $f(x) > 0$*, che è una* **disequazione** *nell'incognita x.*
Analogamente si possono considerare l' **insieme di negatività***, definito da f(x)<0, l'* **insieme di non negatività***, definito da f(x)³0, e l'* **insieme di non positività***, definito da f(x)£0.*

Osservazione*: graficamente l'insieme degli zeri di f è costituito dai punti di intersezione tra il grafico della funzione e l'asse x; l'insieme di livello k è costituito dai punti di intersezione tra il grafico della funzione e la retta y=k; l'insieme di positività è l'insieme degli x* ***Î*** *dom f per cui il grafico di f si svolge "al di sopra" dell'asse x.*

Definizione: *si ha un* **sistema di equazioni** *quando, assegnate due o più equazioni, si vuole determinare l'intersezione degli insiemi delle loro soluzioni.*

Definizione*: due* **equazioni** $f(x) = g(x)$ *e* $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$ *si dicono* **equivalenti** *se ogni soluzione della prima è anche soluzione della seconda e ogni soluzione della seconda è anche soluzione della prima.*
In modo analogo si definisce l'equivalenza di disequazioni, di sistemi di equazioni e di sistemi di disequazioni.

Proposizione: *l'equazione* $f(x) = g(x)$ *(1) (che ha significato solo se* $x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ *) si trasforma in una equazione equivalente aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri una medesima funzione definita in* **R**.
Dall'equazione (1) si ottiene un'equazione equivalente moltiplicando o dividendo ambo i membri per una medesima funzione definita in **R** *e diversa da zero.*

Proposizione: *la disequazione* $f(x) > g(x)$ *(2) (*$x \in \text{dom } f \cap \text{dom } g$ *) si trasforma in una disequazione equivalente aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri una medesima funzione definita in* **R**.
Dalla (2) si ottiene una disequazione equivalente moltiplicando o dividendo ambo i membri per una medesima funzione definita in **R** *e strettamente positiva.*
Moltiplicando o dividendo ambo i membri della (2) per una funzione h(x) definita in R e strettamente negativa si ottiene la disequazione equivalente $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$.
Analoghe considerazioni possono essere fatte per disequazioni in cui compaiono simboli$<$, $\leq$, oppure $\geq$.

ESEMPI

Equazioni e disequazioni di primo grado

Un'equazione di primo grado ha la forma $ax + b = 0$, dove a, b $\in$ **R**.

se $a \neq 0$ l'equazione è **determinata** ed ha la soluzione $x = -\frac{b}{a}$;

se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione non ha soluzioni e viene detta **impossibile**;

se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione è soddisfatta per qualsiasi valore di x e viene detta **identità**.

Data ultima revisione 10/05/00

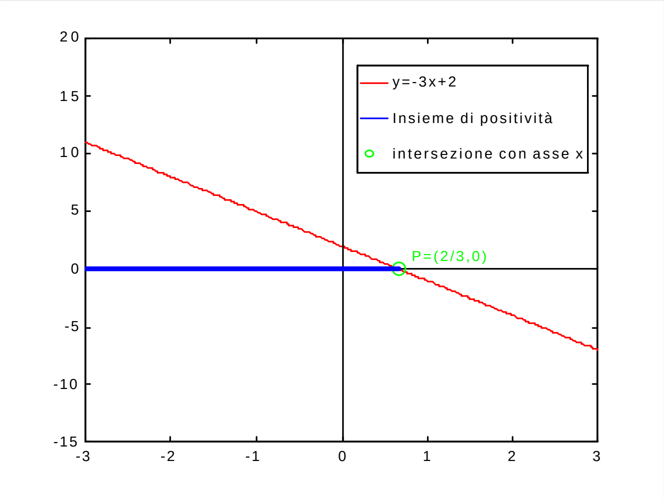
Graficamente l'equazione $ax + b = 0$ rappresenta il punto di intersezione (se $a \neq 0$) tra la retta $y = ax + b$ e l'asse delle ascisse.

1. Determinarne l'insieme degli zeri e l'insieme di positività della funzione $f(x) = -3x + 2$. Interpretare graficamente i risultati ottenuti.

Per determinare l'insieme degli zeri di f risolviamo l'equazione $f(x) = 0 \leftrightarrow -3x + 2 = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Per determinare l'insieme di positività di f risolviamo la disequazione $f(x) > 0 \leftrightarrow -3x + 2 > 0 \leftrightarrow -3x > -2 \leftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$

La retta ha un solo punto di intersezione con l'asse x $P = (2/3, 0)$. Il grafico di f si svolge al di sopra dell'asse delle ascisse per tutti gli $x \in (-\infty, 2/3)$.



Equazioni e disequazioni di secondo grado

Un'equazione di secondo grado ha la forma $ax^2 + bx + c = 0$, dove $a, b, c \in \mathbf{R}$, con $a \neq 0$.

L'espressione $\Delta = b^2 - 4ac$ è detta **discriminante**.

Abbiamo 3 casi possibili:

- se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni distinte $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- se $\Delta = 0$ l'equazione ha un'unica soluzione (o due soluzioni coincidenti) $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- se $\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali .

Graficamente l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ rappresenta i punti di intersezione (se esistono) tra la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e l'asse delle ascisse.

2. *Risolvere, interpretandole graficamente, le seguenti disequazioni di secondo grado*:

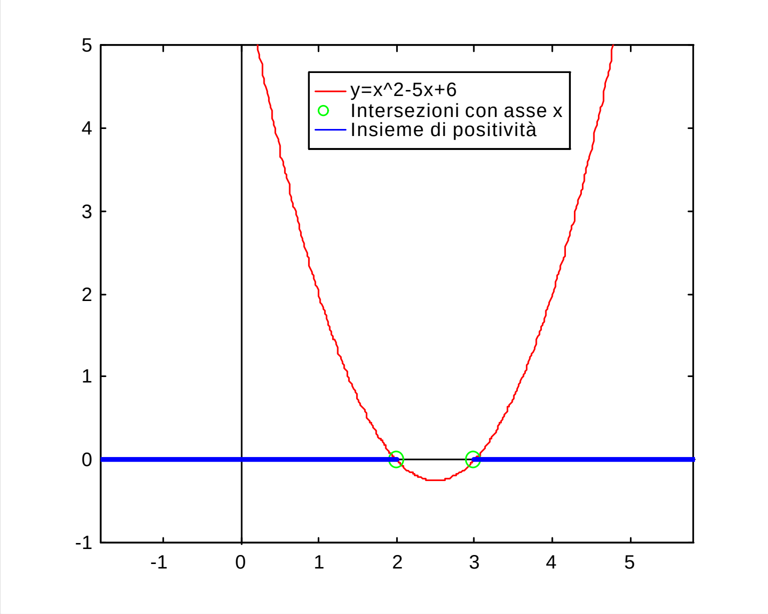
- $x^2 - 5x + 6 > 0$

  Graficamente dobbiamo determinare i valori di x per cui la parabola $g:\ y = x^2 - 5x + 6$ sta al di sopra dell'asse delle ascisse.

Determiniamo gli zeri di γ risolvendo l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

Dal disegno osserviamo che il grafico della parabola si svolge al di sopra dell'asse *x* per *x* ***Î****(- ¥,2)* ***È*** *(3,+ ¥).*



Otteniamo il grafico di γ partendo dal grafico di $y = x^2$ con la seguente

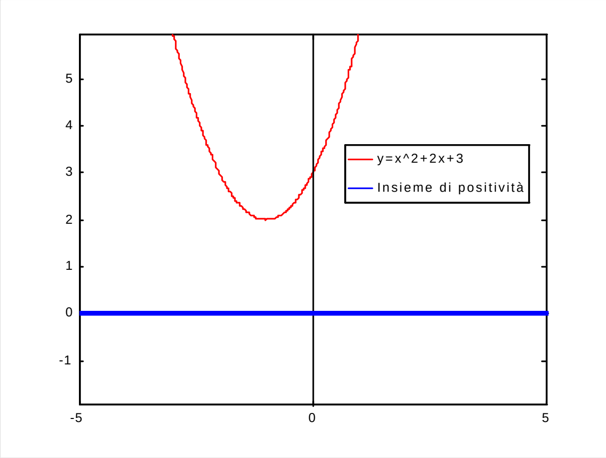
trasformazione: $y = x^2 \xrightarrow{t\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)} y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = x^2 - 5x + 6$

Il vertice di γ è, quindi, il punto *V = (5/2,-1/4).*

Osservazione : *in generale, assegnata la parabola di equazione* $y = ax^2 + bx + c$, *il vertice è il punto* $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

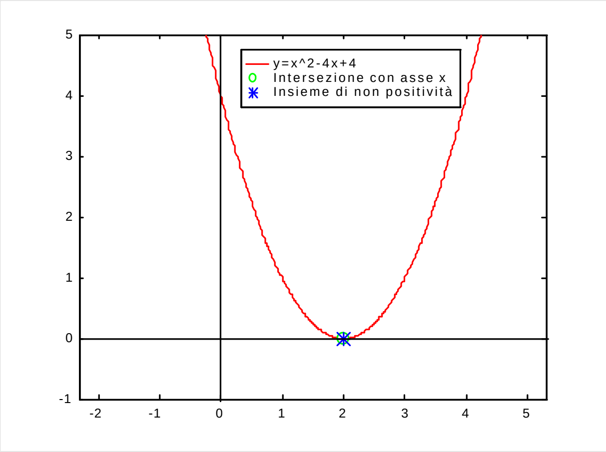
se a>0 la concavità è rivolta verso l'alto, se a<0 verso il basso.

- $x^2 + 2x + 3 > 0$



La parabola $g: y = x^2 + 2x + 3$ ha il vertice nel punto $V = (-1,2)$, non ha intersezioni con l'asse x, essendo $D = -8<0$ e la concavità è rivolta verso l'alto (nel passaggio da $y=x^2$ a γ non ci sono simmetrie). Quindi il grafico di γ si svolge al di sopra dell'asse x e pertanto la disequazione è verificata da qualsiasi x ***Î*****R**.

- $x^2 - 4x + 4 \leq 0$



La parabola $g: y = x^2 - 4x + 4$ ha:

- il vertice nel punto $V = (2,0)$
- una sola intersezione con l'asse x nel punto $x=2$, essendo $D = 0$,
- la concavità rivolta verso l'alto ($a=1>0$).

Dobbiamo determinare gli x per cui la parabola γ sta al di sotto o interseca l'asse x: la soluzione della disequazione è $x=2$.

- $-x^2+9x-18\geq 0$

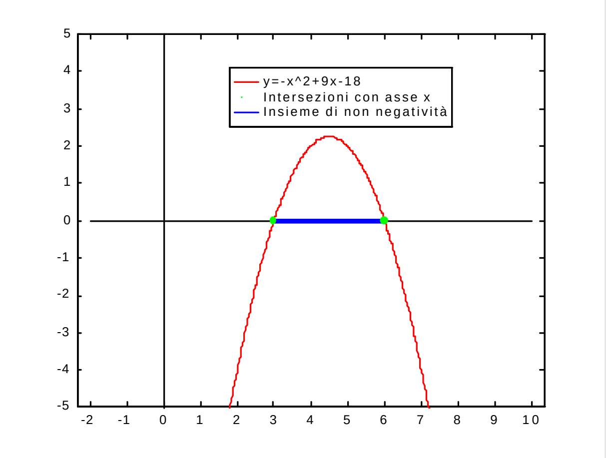
Consideriamo la parabola $g: y=-x^2+9x-18$; essa ha:

- il vertice nel punto $V = (9/2, 9/4)$,

- due intersezioni con l'asse x ($x_1 = 3$, $x_2 = 6$) essendo $D = 9>0$,

- la concavità rivolta verso il basso ($a = -1<0$).

Il grafico della parabola si svolge al di sopra o interseca l'asse x nell'intervallo chiuso $[3, 6]$.



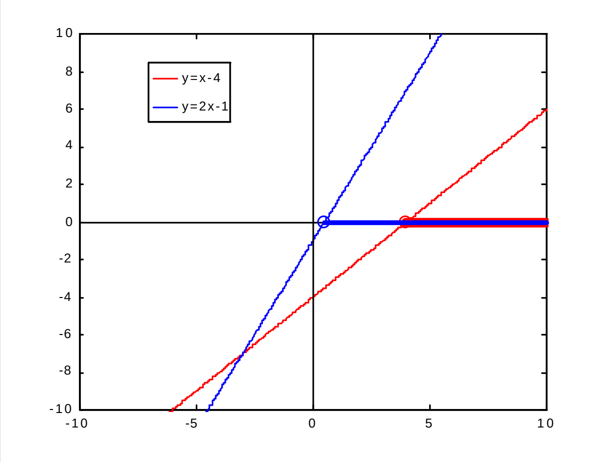
Equazioni e disequazioni fratte

3. *Determinare l'insieme dei numeri reali per cui risulta* $f(x)=\dfrac{x-4}{2x-1}\geq 0$ *(3)*

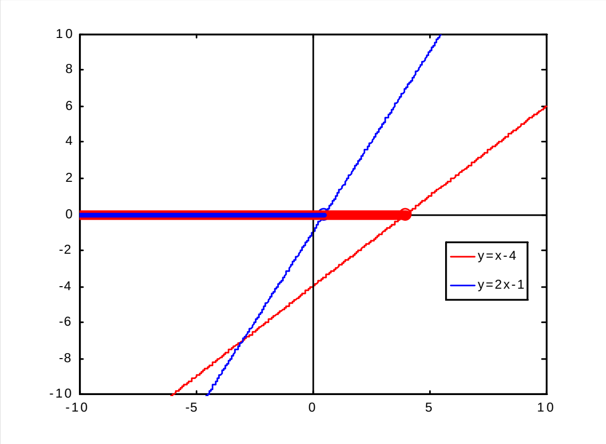
- Primo metodo

L'insieme delle soluzioni della (3) è l'unione delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ e delle disequazione $f(x)>0$.
Un quoziente è nullo se e solo se è nullo il suo numeratore: quindi $f(x)=0 \leftrightarrow x-4=0 \leftrightarrow x=4=S_1$.
Un quoziente è strettamente positivo se il numeratore ed il denominatore sono entrambi positivi o entrambi negativi. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione $f(x)>0$ corrisponde all'unione delle soluzioni dei sistemi *I* e *II*:

$$I:\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow (4,+\infty)\cap\left(\frac{1}{2},+\infty\right)=(4,+\infty)$$



$$II:\begin{cases} x-4<0 \\ 2x-1<0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow (-\infty,4)\cap\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$$



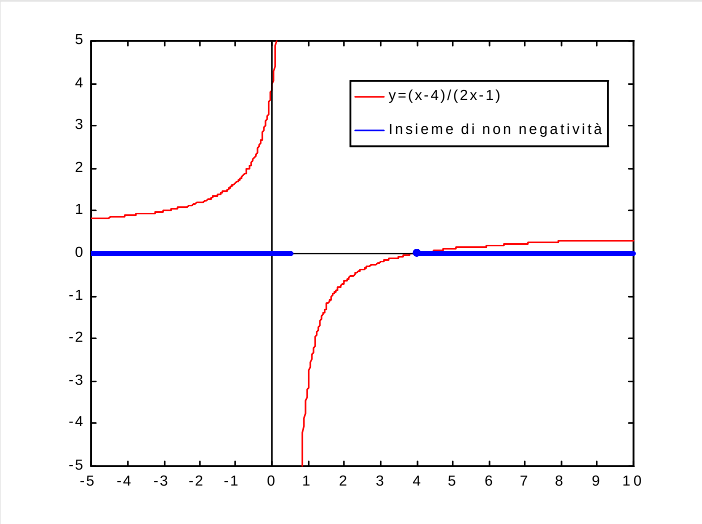
Unendo le soluzioni dei sistemi *I* e *II* otteniamo: $S_2 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (4, +\infty)$.

La soluzione *S* della disequazione (3) è, dunque: $S = S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup [4, +\infty)$

- Secondo metodo

Risolviamo la disequazione graficamente, cercando l'insieme di non negatività di *f(x)*.

Otteniamo il grafico di *f(x)* partendo da *y=1/x* ed applicando la trasformazione $\tau(1/2,12)\cdot\alpha(1,-7/4)$.

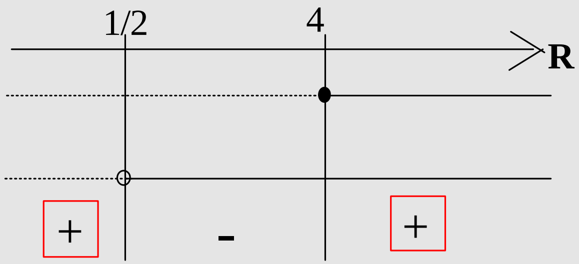


- Terzo metodo

Risolviamo la disequazione algebricamente, studiando il segno del numeratore e del denominatore, per mezzo della tabella seguente:

$$N \geq 0 \leftrightarrow x \geq 4$$

$$D > 0 \leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$



In generale il **segno di una funzione razionale** si può studiare in modo algebrico usando la regola seguente

1. Si studia la positività di ogni fattore di I o di II grado facendo corrispondere ad ogni disequazione un asse orizzontale della tabella.
2. Su ciascun asse si riportano le zone di positività (linea continua) e di negatività (linea tratteggiata) del corrispondente fattore.
3. Si esegue il prodotto dei segni dei fattori nei singoli intervalli: la soluzione è l'unione degli intervalli in cui si è ottenuto il segno +, se è richiesto l'insieme di positività, o il segno -, se è richiesto l'insieme di negatività.

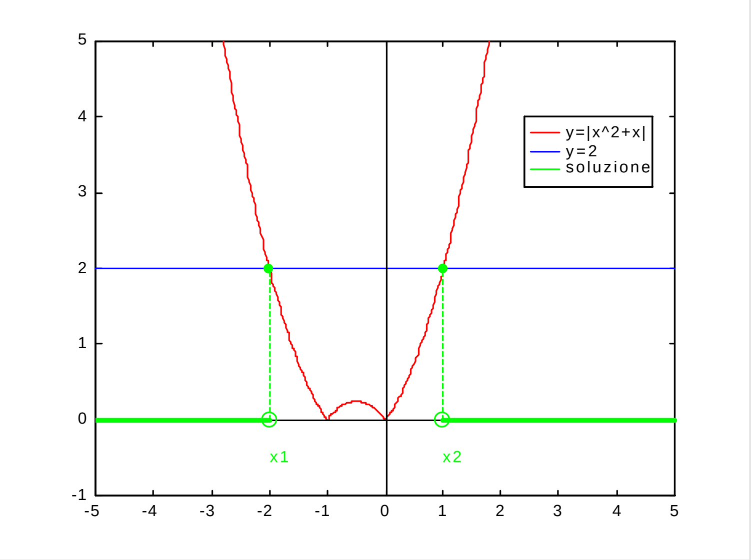
Data ultima revisione 10/05/00

4. *Risolvere graficamente la disequazione* $|x^2+x|>2$

Si tratta di trovare le x per cui il grafico della funzione $y=|x^2+x|$ si svolge al di sopra del grafico della funzione $y=2$.

Osservazione: *in generale il grafico della funzione* $y=|f(x)|$ *coincide con quello di f(x) nell'insieme dei punti in cui f è positiva o nulla, mentre è ottenuto applicando a f una simmetria rispetto all'asse x nell'insieme dei punti in cui f è negativa.*

Disegniamo le funzioni: osserviamo che si intersecano in due punti di ascissa x_1 e x_2. Il grafico della funzione $y=|x^2+x|$ si svolge al di sopra del grafico della funzione $y=2$ per $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$.



Otteniamo x_1 e x_2 intersecando il ramo di $y=|x^2+x|$ "non ribaltato" ($y=x^2+x$) con y=2, vale a dire risolvendo l'equazione $x^2+x=2$, le cui soluzioni sono $x_1=-2$ e $x_2=1$.

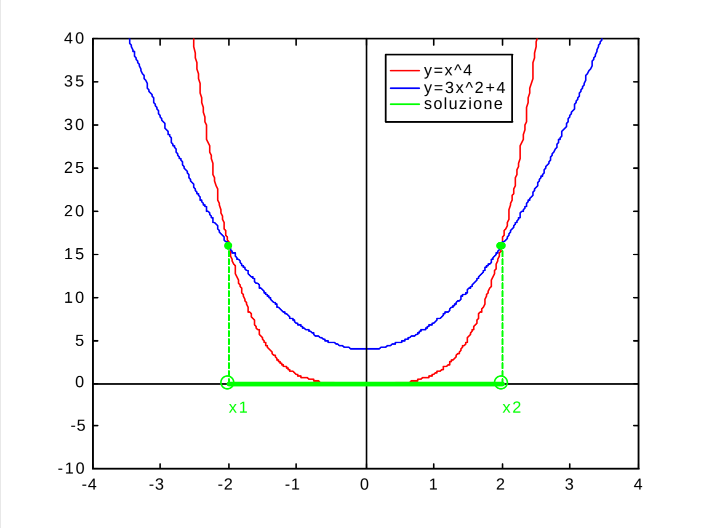
Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è :

$$S=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$$

5. *Risolvere graficamente la disequazione* $x^4 < 3x^2 + 4$

Si tratta di trovare le x per cui il grafico della funzione $y = x^4$ si svolge al di sotto del grafico della funzione $y = 3x^2 + 4$.

Disegniamo le funzioni: osserviamo che si intersecano in due punti di ascissa x_1 e x_2. Il grafico della funzione $y=x^4$ si svolge al di sotto del grafico della funzione $y=3x^2+2$ per $x \in (x_1, x_2)$.



Otteniamo x_1 e x_2 intersecando le due curve, vale a dire risolvendo l'equazione $x^4 = 3x^2 + 4$ (4).

La (4) è una **equazione biquadratica**: si può ricondurre ad una equazione di secondo grado mediante la sostituzione $x^2 = t$:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \xleftrightarrow{x^2=t} t^2 - 3t - 4 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \\ t_2 = -1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{impossibile} \end{array}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è : $S = (-2, 2)$