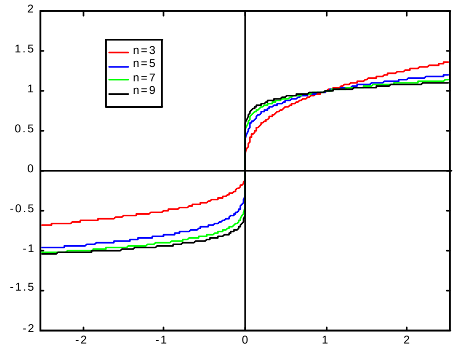
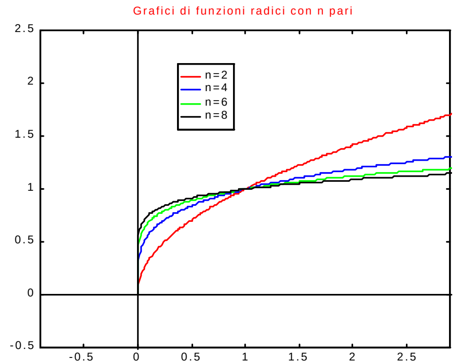
FUNZIONI RADICE

RICHIAMI DI TEORIA

$f(x)=\sqrt[n]{x}$	*dom f*	*Im f*	grafici
n dispari	**R**	**R**	
n pari	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	

Proposizione: *le funzioni radice verificano le relazioni:*

$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ per ogni $x \in [0,+\infty), n \geq 1$

$\sqrt[n]{x^n} = x$ per ogni $x \in [0,+\infty), n \geq 1$

Proposizione: *siano a e b numeri reali tali che a, b ³ 0 e siano n ed m numeri naturali tali che n, m ³ 1. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
5. $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^n}$

Definizione:

se n ÎN, n ¹ 0 e se x ³ 0 definiamo $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ *;*

se p e q interi positivi, primi tra loro, e se x ³ 0 definiamo $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ *;*

se p e q interi positivi, primi tra loro, e se x> 0 definiamo $x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$.

ESEMPI

1. *Ridurre allo stesso indice i radicali seguenti* $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{3}$, $\sqrt[12]{7}$.

Calcoliamo il *m.c.m* tra gli indici dei radicali: $m.c.m(2,4,8,12) = 24$

Utilizzando la proprietà (5) possiamo scrivere: $\sqrt{5} = \sqrt[2\cdot\frac{24}{2}]{5^{\frac{24}{2}}} = \sqrt[2\cdot 12]{5^{12}} = \sqrt[24]{5^{12}}$, $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 6]{2^{6}} = \sqrt[24]{2^{6}}$, $\sqrt[8]{3} = \sqrt[8\cdot 3]{3^{3}} = \sqrt[24]{3^{3}}$,
$\sqrt[12]{7} = \sqrt[12\cdot 2]{7^{2}} = \sqrt[24]{7^{2}}$

2. *Semplificare l'espressione* $\sqrt[3m+3]{a^{2m+2}\cdot b^{m+1}}$ *, dove a, b ³ 0.*

Utilizzando la proprietà (5), abbiamo:

$$\sqrt[3m+3]{a^{2m+2}\cdot b^{m+1}} = \sqrt[3(m+1)]{a^{2(m+1)}\cdot b^{m+1}} = \sqrt[3(m+1)]{\left(a^{2}\cdot b\right)^{m+1}} = \sqrt[3]{a^{2}\cdot b}$$

3. *Ridurre* $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{xy}{2}}$ *ad un unico radicale, supponendo x>0 e y ³0.*

Applicando le proprietà delle radici otteniamo:

$$\frac{1}{x}\sqrt{\frac{xy}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^{2}}\cdot\sqrt{\frac{xy}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^{2}\cdot\frac{xy}{2}} = \sqrt{\frac{1}{x^{2}}\cdot\frac{xy}{2}} = \sqrt{\frac{y}{2x}}$$

4. Date le seguenti espressioni, portare fuori segno di radice i fattori il cui esponente è maggiore o uguale all'indice della radice.

- $\sqrt{50a^2b^5x^3}$ con $a, b, x \geq 0$

In generale, applicando le proprietà delle radici, abbiamo $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$, supponendo $a, b \geq 0$.
Cerchiamo di isolare nel radicando un fattore di esponente 2 (indice della radice):

$$\sqrt{50a^2b^5x^3} = \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot b \cdot x^2 \cdot x} = \sqrt{\left(5ab^2x\right)^2 \cdot 2bx} = 5ab^2x \cdot \sqrt{2bx}$$

- $\sqrt{8x^2y^3z^4}$

Osserviamo che, a differenza dell'esercizio precedente, in questo caso non è stato specificato il campo di variabilità di x e y: occorre, dunque, applicare le proprietà con una certa cautela (ricordiamo che le proprietà sono valide se i fattori che compongono il radicando sono positivi).
In generale, per ogni $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} = |x|$, poiché la radice quadrata, come ogni radice di indice pari, è una quantità positiva.

Tenendo conto di questa osservazione abbiamo: $\sqrt{8x^2y^3z^4} = \sqrt{\left(2xyz^2\right)^2 \cdot 2y} = \left|2xyz^2\right| \cdot \sqrt{2y} = 2z^2|xy| \cdot \sqrt{2y}$

5. *Dire per quali valori di x la relazione* $\sqrt[6]{\left(x^2+5x+6\right)^6}=\left(x+2\right)\cdot\left(x+3\right)$ *è corretta.*

Ponendo, per comodità, $x^2+5x+6=y$, la relazione diventa: $\sqrt[6]{y^6}=y$.

Poiché $\sqrt[6]{y^6}=\begin{cases} y & \text{se } y\geq 0 \\ -y & \text{se } y<0 \end{cases}$, deduciamo che i valori di x da considerare sono quelli per cui y *³0*,

vale a dire $x\in\left(-\infty,-3\right]\cup\left[-2,+\infty\right)$

6. *Determinare il dominio delle funzioni* $f_1(x)=\sqrt{x^2-4}$, $f_2(x)=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$, $g_1(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$,

$g_2(x)=\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x^2+x+1}$ *e dire per quali valori di x valgono le relazioni*: $f_1(x)=f_2(x)$ e $g_1(x)=g_2(x)$.

Il dominio di f_1 è $\left\{x\in\mathbf{R}: x^2-4\geq 0\right\}$, vale a dire $\operatorname{dom} f_1=\left(-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.

La funzione f_2 è il prodotto di due radici quadrate: il suo dominio è l'intersezione dei domini delle funzioni $y=\sqrt{x-2}$ e $y=\sqrt{x+2}$, vale a dire $\operatorname{dom} f_2=\left\{x\in\mathbf{R}: x\geq 2\right\}\cap\left\{x\in\mathbf{R}: x\geq -2\right\}=\left[2,+\infty\right)$.

L'uguaglianza delle due funzioni f_1 e f_2 è verificata solo nell'intersezione dei loro domini:

$$f_1(x)=f_2(x)\leftrightarrow x\in\operatorname{dom} f_1\cap\operatorname{dom} f_2=\left[2,+\infty\right)$$

Le radici cubiche, come tutte le radici di indice dispari, non danno problemi; abbiamo: $\operatorname{dom} g_1=\mathbf{R}$ e $\operatorname{dom} g_2=\mathbf{R}$. quindi:

$$g_1(x)=g_2(x)\leftrightarrow x\in\operatorname{dom} g_1\cap\operatorname{dom} g_2=\mathbf{R}$$

7. *Risolvere algebricamente ed interpretare geometricamente l'***equazione irrazionale** $\sqrt{2x+6}=x-1$.

Dobbiamo tenere conto del campo di definizione e della positività della radice a primo membro:

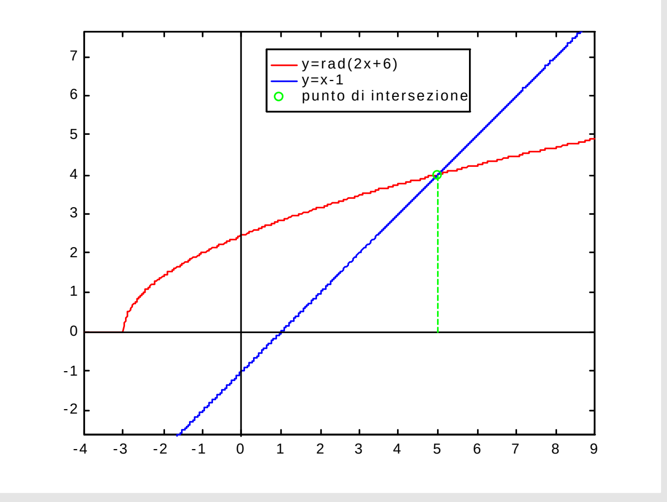
- la radice quadrata esiste se e solo se il radicando è positivo o uguale a zero: $2x+6\geq 0 \leftrightarrow x\geq -3$.
- la radice quadrata è una quantità positiva, quindi il secondo membro dell'equazione deve essere positivo: $x-1\geq 0 \leftrightarrow x\geq 1$

L'equazione ha significato se queste condizioni sono verificate contemporaneamente: $\begin{cases} x\geq -3 \\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow x\geq 1$.

Elevando al quadrato ambo i membri dell'equazione, otteniamo:

$$2x+6=x^2-2x+1 \leftrightarrow x^2-4x-5=0 \leftrightarrow x_1=-1, x_2=5$$

Solo x_2 verifica la condizione di esistenza, ed è, pertanto, l'unica soluzione accettabile.



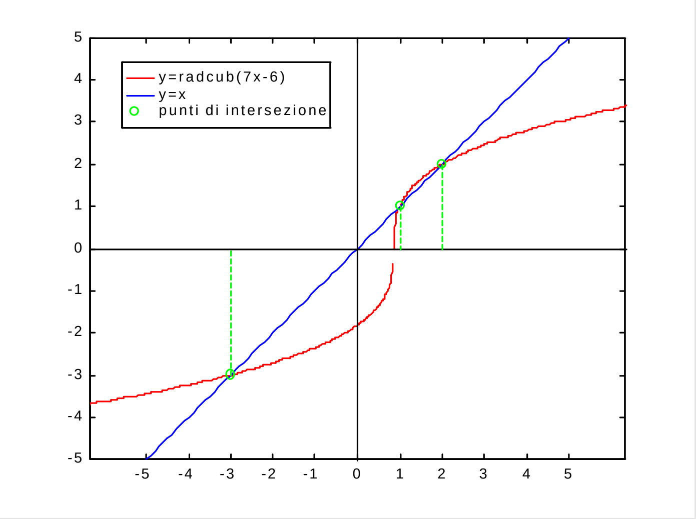
Geometricamente, la soluzione dell'equazione rappresenta il punto (abbiamo visto, algebricamente, che l'equazione ha una sola soluzione) di intersezione tra i grafici delle funzioni $y=\sqrt{2x+6}$ e $y=x-1$.

Possiamo disegnare il grafico di $y=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$ partendo dal grafico di $y=\sqrt{x}$ ed applicando le trasformazioni:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{d\left(\frac{1}{2},1\right)} y=\sqrt{2x} \xrightarrow{t(-3,0)} y=\sqrt{2(x+3)}$$

8. *Risolvere algebricamente ed interpretare geometricamente l'***equazione irrazionale** $\sqrt[3]{7x-6}=x$.

Geometricamente, la soluzione dell'equazione rappresenta il/i punto/i di intersezione tra i grafici delle funzioni $y=\sqrt[3]{7x-6}$ e $y=x$.



Possiamo tracciare il grafico di $y=\sqrt[3]{7x-6}=\sqrt[3]{7\left(x-\frac{6}{7}\right)}$, partendo da quello di $y=\sqrt[3]{x}$, con le seguenti trasformazioni:

$$y=\sqrt[3]{x}\xrightarrow{d\left(\frac{1}{7},1\right)}y=\sqrt[3]{7x}\xrightarrow{t\left(\frac{6}{7},0\right)}y=\sqrt[3]{7\left(x-\frac{6}{7}\right)}.$$

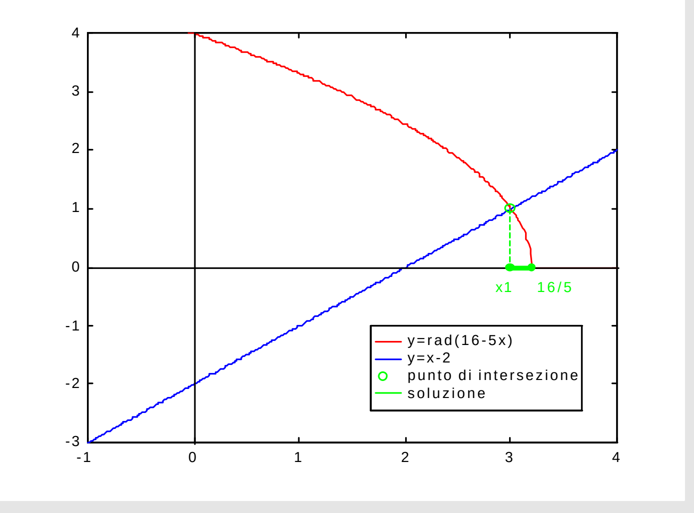
Dal disegno osserviamo che le due curve hanno 3 punti di intersezione: per determinarli risolviamo algebricamente l'equazione, elevando ambo i membri al cubo:

$$\sqrt[3]{7x-6}=x\leftrightarrow 7x-6=x^3\leftrightarrow x^3-7x+6=0\leftrightarrow (x+3)(x-1)(x-2)=0\leftrightarrow x=-3\cup x=1\cup x=2$$

9. *Risolvere graficamente e algebricamente la disequazione irrazionale* $\sqrt{16-5x} \le x-2$.

- soluzione grafica

Disegniamo i grafici delle funzioni $f_1(x)=\sqrt{16-5x}$ e $f_2(x)=x-2$. Si tratta di trovare gli *x* per cui il grafico di f_1 si svolge al di sotto del grafico di f_2 o coincide con esso.



Il grafico di $f_1(x)=\sqrt{16-5x}=\sqrt{-5\left(x-\frac{16}{5}\right)}$ si può ottenere al partire dal grafico di $y=\sqrt{x}$ con le trasformazioni:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{s_y} y=\sqrt{-x} \xrightarrow{d\left(\frac{1}{5},1\right)} y=\sqrt{-5x} \xrightarrow{t\left(\frac{16}{5},0\right)} y=\sqrt{-5\left(x-\frac{16}{5}\right)}$$

Osserviamo che le due curve hanno un punto di intersezione $x_1>0$: il grafico di f_1 sta al di sotto del grafico di f_2 per $x \in \left[x_1, \frac{16}{5}\right]$.

Per determinare x_1 risolviamo l'equazione $\sqrt{16-5x}=x-2$; elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$\sqrt{16-5x}=x-2 \leftrightarrow 16-5x=x^2-4x+4 \leftrightarrow x^2+x-12=0 \leftrightarrow x=-4 \cup x=3$

Poiché $x_1>0$, abbiamo $x_1=3$.

- soluzione algebrica

Osservazione:

La **disequazione irrazionale** della forma $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ equivale a :

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \leftrightarrow f(x) < [g(x)]^n \qquad \text{se } n \text{ è dispari}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è pari}$$

La disequazione irrazionale della forma $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ equivale a :

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \leftrightarrow f(x) > [g(x)]^n \qquad \text{se } n \text{ è dispari}$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases} \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

Applicando le regole suddette alla nostra disequazione, otteniamo:

$$\sqrt{16-5x} \le x-2 \leftrightarrow \begin{cases} 16-5x \ge 0 \\ x-2>0 \\ 16-5x \le (x-2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{16}{5} \\ x>2 \\ x^2+x-12 \ge 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{16}{5} \\ x>2 \\ x \le -4 \cup x \ge 3 \end{cases} \leftrightarrow x \in \left[3, \frac{16}{5}\right]$$

10. *Risolvere graficamente la disequazione* $\sqrt{x^2-4} > |x| - 4$.

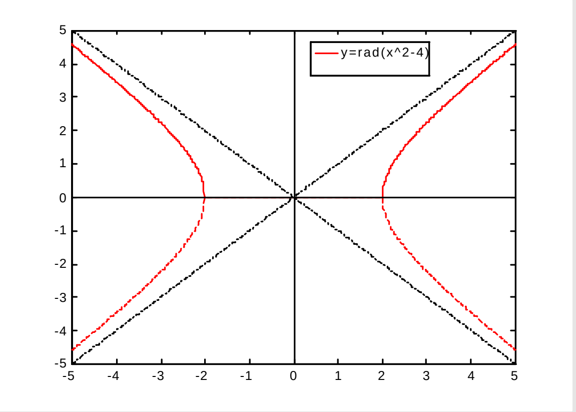
Disegniamo i grafici delle funzioni $f_1(x) = \sqrt{x^2-4}$ e $f_2(x) = |x| - 4$. Si tratta di trovare gli x per cui il grafico di f_1 si svolge al di sopra del grafico di f_2 .

Osserviamo che il grafico della funzione f_1 non si può ottenere a partire da y=Öx utilizzando le trasformazioni del piano.
Per tracciarne il grafico proseguiamo nel seguente modo:

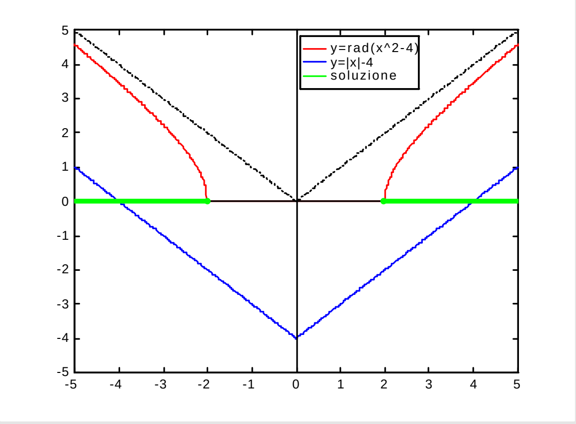
- determiniamo $\mathrm{dom}\, f_1 = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ e $\mathrm{Im}\, f_1 = [0,+\infty)$.

- elevando al quadrato ambo i membri dell'equazione $y = \sqrt{x^2-4}$ otteniamo $y^2 = x^2 - 4 \leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$, che è l'equazione di una iperbole equilatera riferita ai propri assi, con centro nell'origine del sistema di riferimento e vertici nei punti $V_1 = (-2, 0)$ *e* $V_2 = (2,0)$.

- il grafico di f_1 corrisponde ai rami di iperbole al di sopra dell'asse x (infatti $\mathrm{Im}\, f_1 = [0,+\infty)$).



- il grafico di f_2 si ottiene a partire dal grafico di $y=|x|$ con la seguente trasformazione: $y = |x| \xrightarrow{t(0,-4)} y = |x| - 4$.



Osserviamo che non vi sono punti di intersezione tra le due curve.

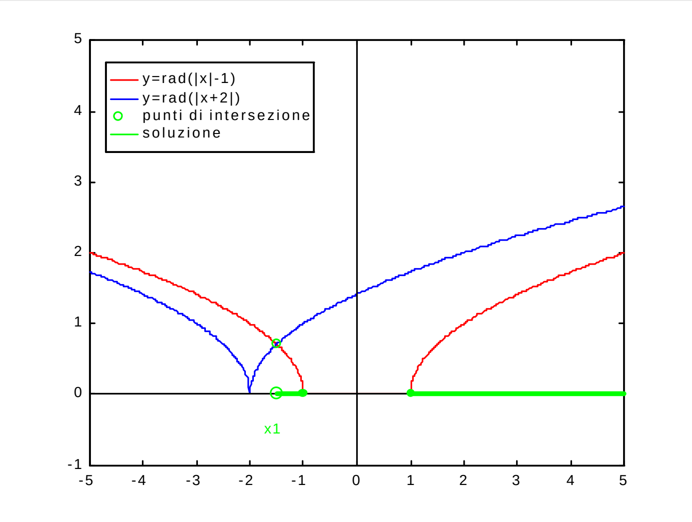
Il grafico di f_1 si svolge al di sopra del grafico di f_2 per ogni

$x \in \mathrm{dom}\, f_1 \cap \mathrm{dom}\, f_2 = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

11. *Risolvere graficamente la disequazione* $\sqrt{|x|-1} < \sqrt{|x+2|}$

Tracciamo i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{|x|-1}$ e. $g(x) = \sqrt{|x+2|}$

Osservazione: *per costruire il grafico di* $y = f(|x|)$ *a partire da quello di y = f(x) si ripete senza modifiche il grafico di y=f(x) per x ³0 e lo si estende ai valori negativi di x in modo simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.*



- Grafico di $f(x) = \sqrt{|x|-1}$: applichiamo la traslazione ***t****(1,0)* a $y = \sqrt{x}$, ottenendo $f_1(x) = \sqrt{x-1}$; si ha $f(x) = f_1(|x|)$
- Grafico di $g(x) = \sqrt{|x+2|}$: partendo da $g_1(x) = \sqrt{x}$, abbiamo $g_2(x) = g_1(|x|) = \sqrt{|x|}$; otteniamo *g(x)* applicando a $g_2(x)$ la traslazione ***t****(-2,0).*

La soluzione della disequazione è $(x_1, -1] \cup [1, +\infty)$ dove x_1 è la soluzione dell'equazione *f(x) = g(x).*

Per risolverla eleviamo al quadrato ambo i membri, ottenendo l'equazione

$$|x| - 1 = |x+2| \leftrightarrow x = -\frac{3}{2},$$