FUNZIONI

RICHIAMI DI TEORIA

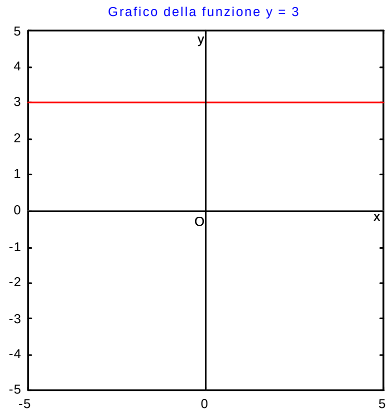
Il concetto di funzione

Definizione 1: *siano X e Y due insiemi non vuoti. Una* **funzione** *f da X in Y* $\left(f : X \rightarrow Y \right)$ *è una relazione tra i due insiemi che ad ogni x* **Î** *X fa corrispondere uno ed un solo y* **Î** *Y ;diciamo che y è* **immagine** *di x mediante la funzione f ed utilizziamo la scrittura y=f(x).*
Il **dominio** *(dom f) della funzione f è l'insieme di tutti i possibili valori reali che si possono attribuire a x* **Î** *X affinché esista il corrispondente valore y* **Î** *Y. L'insieme di tutte le immagini è detto* **insieme immagine** *(Im f).*

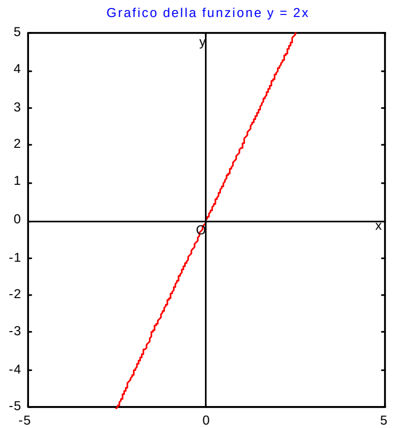
Definizione 2: *si dice* **funzione** *f da X in Y un sottoinsieme non vuoto G del prodotto cartesiano X ´ Y tale che, se due coppie* $\left(x, y'\right)$ *e* $\left(x, y''\right)$ *appartengono a f, si ha* $y' = y''$ *; preso un qualsiasi punto* $\left(x, y\right) \in G$ *, l'elemento y è il valore di f nel punto x. Il* **dominio** *di f è l'insieme di tutte le prime componenti degli elementi di G (ovvero la proiezione di G su X); l'* **insieme immagine** *di f è costituito dalla proiezione di G su Y.*

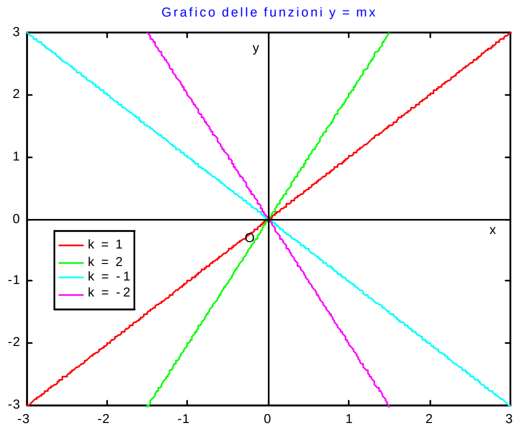
Definizione: *una* **funzione** *è detta* **reale di variabile reale** *se ha come insieme di partenza e come insieme di arrivo l'insieme* **R**.

Alcuni tipi di funzione:

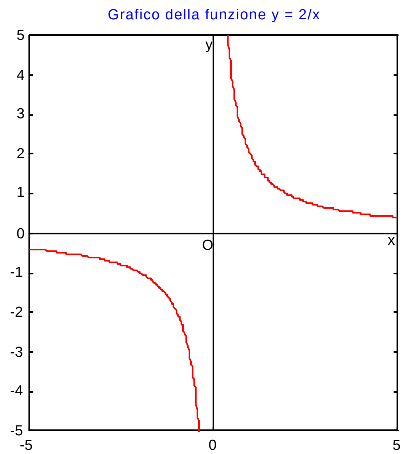


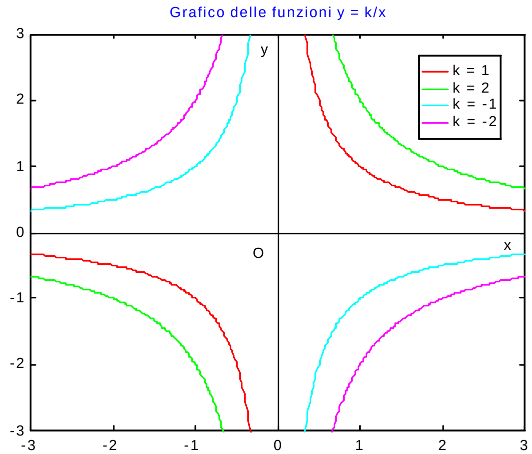
- **funzioni costanti**: $y=c$





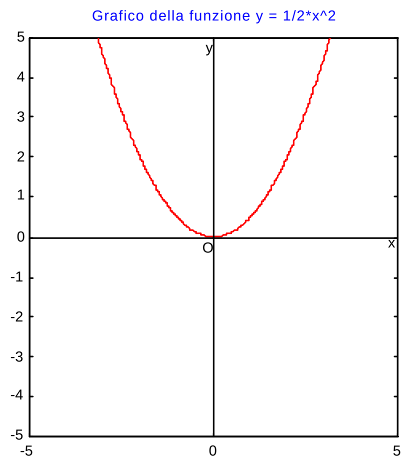
- **funzioni lineari**: $y = mx$

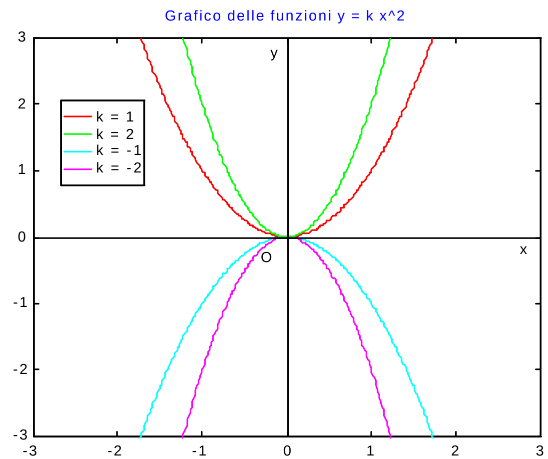




- **funzioni di proporzionalità inversa**:

  $y = \frac{k}{x}$, con $k \neq 0$

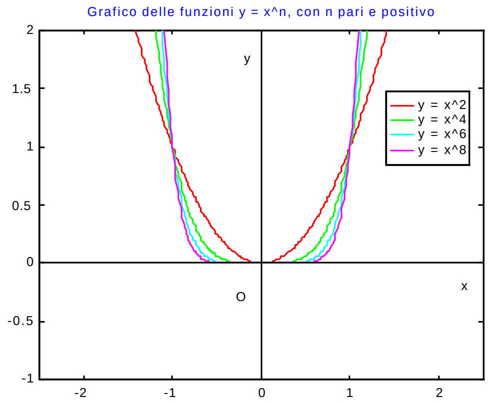


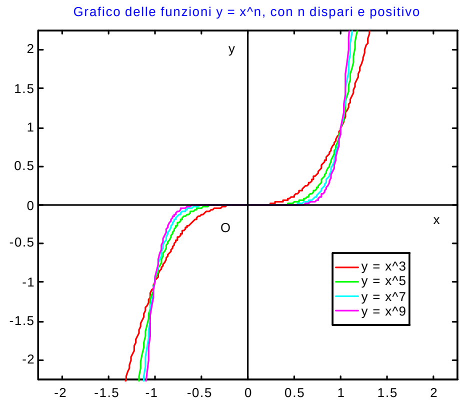


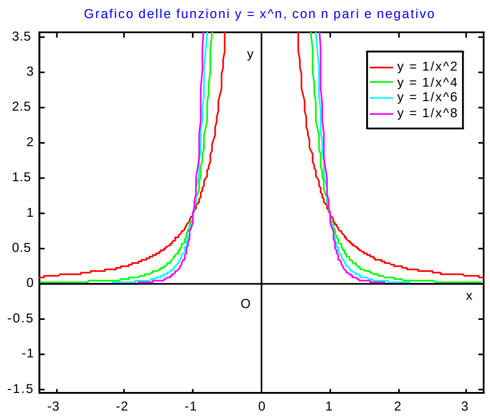
- **funzioni quadratiche**:

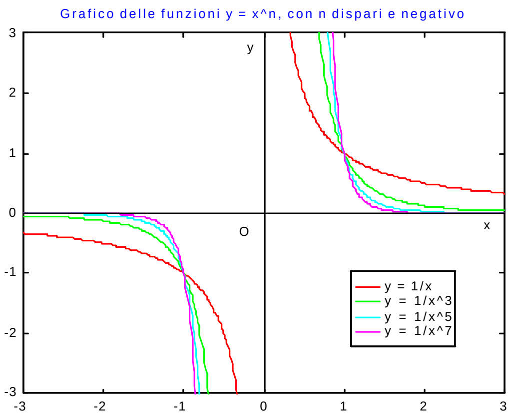
  $y = kx^2$

- **funzioni del tipo** $y = x^n$, con $n \in \mathbf{Z}$



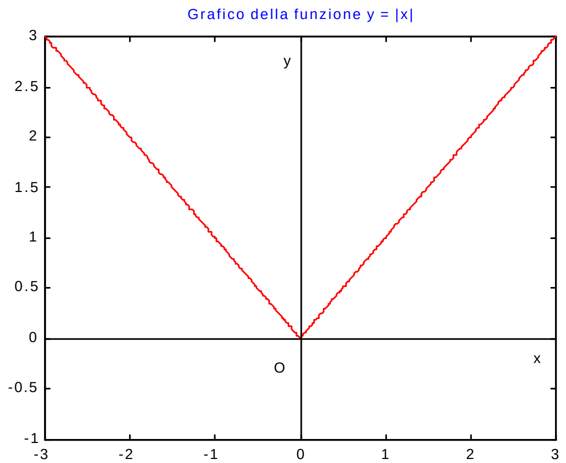






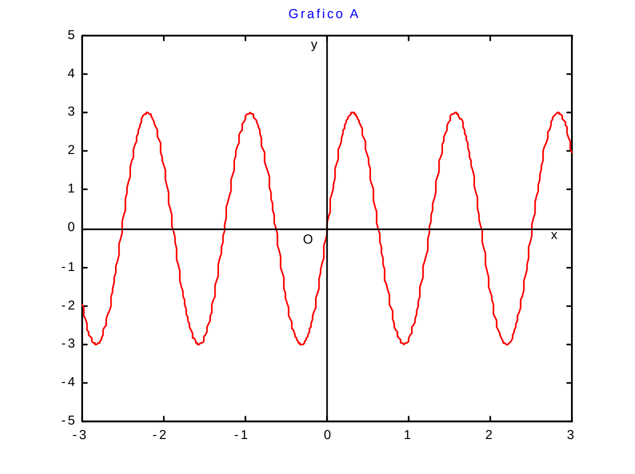
Data ultima revisione 10/05/00

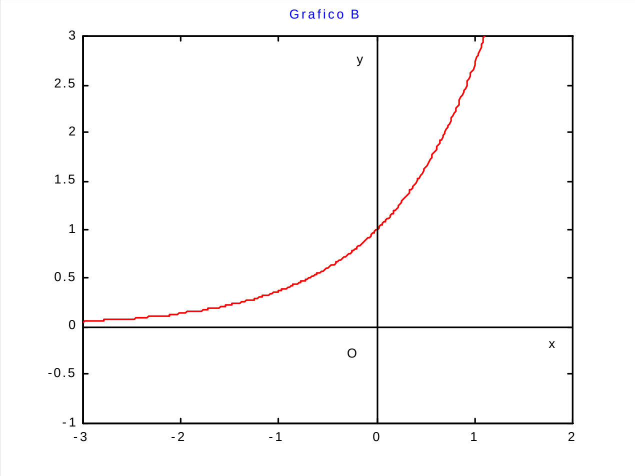
- **la funzione valore assoluto**: $y = |x|$

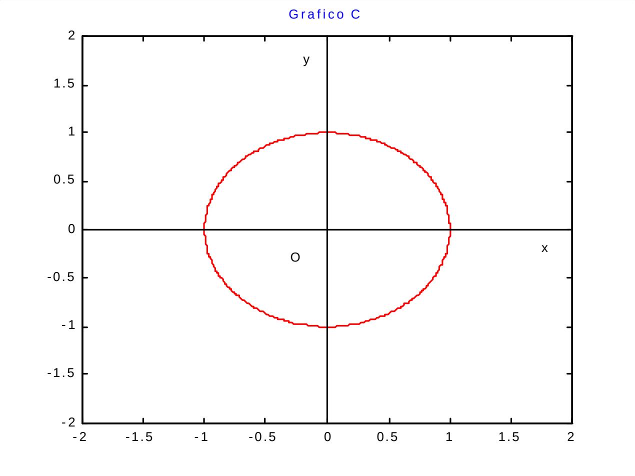


ESEMPI

1. *Dire se i seguenti grafici rappresentano delle funzioni:*





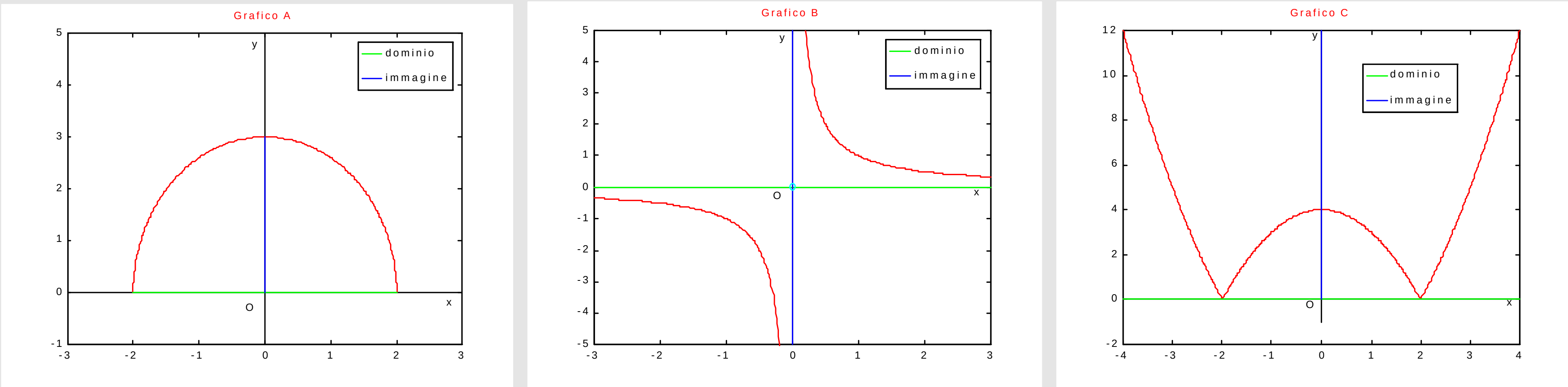


Ricordiamo che un semplice criterio per stabilire se un sottoinsieme $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{R}^2$ è il grafico di una funzione è il seguente:
un sottoinsieme $\boldsymbol{G}$ *di* $\boldsymbol{R}^2$ *è il grafico di una funzione se ogni parallela all'asse y lo interseca al più in un punto.*

Utilizzando il precedente criterio , abbiamo:

Grafico A: funzione
Grafico B: funzione
Grafico C: non è una funzione (ad esempio la retta x =1/2 interseca il grafico in due punti)

2. *Dedurre dominio e immagine delle funzioni rappresentate nei grafici seguenti:*



Ricordiamo che possiamo ottenere il dominio e l'insieme immagine di una funzione proiettando il suo grafico sull'asse delle ascisse e delle ordinate rispettivamente.

In base a questa considerazione, abbiamo:

Grafico A: dominio [-2 2]; immagine = [0 3]
Grafico B: dominio = $(-\infty\ 0) \cup (0\ \ +\infty)$; immagine = $(-\infty\ 0) \cup (0\ \ +\infty)$
Grafico C: dominio = **R**; immagine = $[0\ \ +\infty)$

3. *Data la seguente funzione, determinarne il dominio, l'immagine e disegnarne il grafico.*

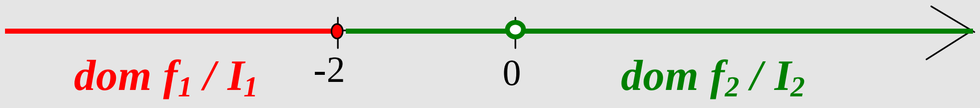
$$f(x)=\begin{cases} 2x & se \;\; x\le -2 \\ \dfrac{1}{x} & se \;\; x>-2 \end{cases}$$

La funzione f è **definita a tratti**, vale a dire la sua espressione amalitica cambia a seconda dell'intervallo che consideriamo: in questo caso $f(x)=2x$ se $x\in I_1=(-\infty,-2]$ e $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se $x\in I_2=(-2,+\infty)$.

La funzione $f_1(x)=2x$ è definita su tutto l'insieme **R** dei numeri reali (possiamo "calcolare" $2\cdot x$ per qualsiasi $x\in$ **R**): il dominio di f_1 ristretta all'intervallo I_1 è $dom\; f_1 / I_1 = dom\; f_1 \cap I_1$ = R $\cap$ $(-\infty, -2] = (-\infty, -2]$.

La funzione $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$ è definita in **R-{0}** (fissato $x\in$ **R**, possiamo "calcolare" $1/x$ tranne quando $x = 0$): restringendo f_2 all'intervallo I_2, abbiamo $dom\; f_2 / I_2$ = R-{0} $\cap (-2, +\infty) = (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

Il dominio della funzione f è l'unione dei domini delle restrizioni di f_1 all'intervallo I_1 e di f_2 all'intervallo I_2, vale a dire:

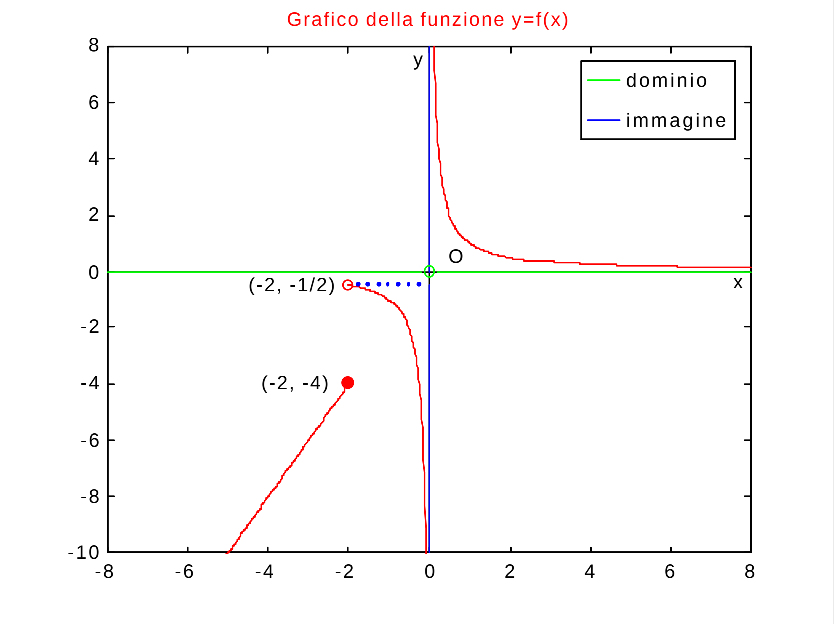


$$\operatorname{dom} f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

Data ultima revisione 10/05/00

$f_1(x)$ è una retta passante per l'origine di coefficiente angolare $m = 2$;

$f_2(x)$ è una iperbole equilatera riferita a propri asintoti.



Abbiamo $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$