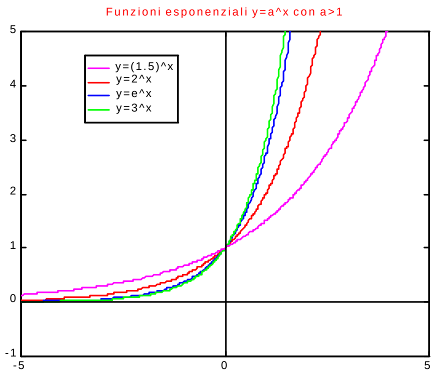
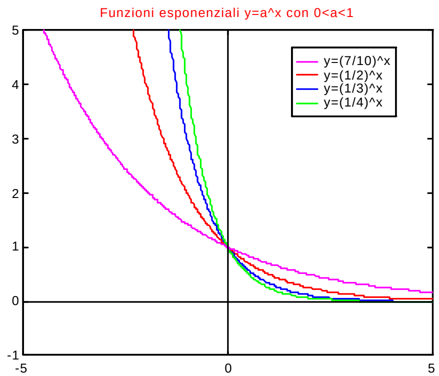
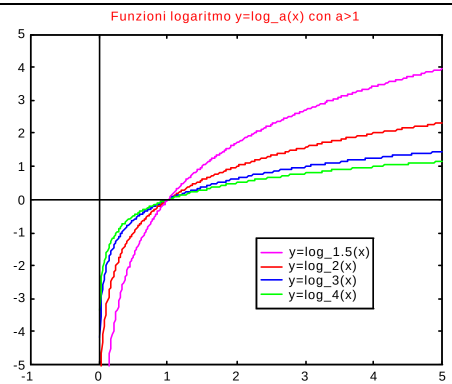
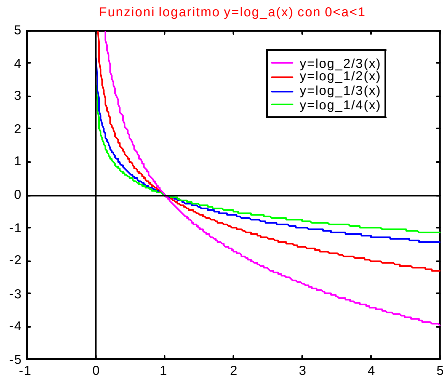
ESPONENZIALI E LOGARITMI

RICHIAMI DI TEORIA

	dom f	*Im f*	grafico
Funzione esponenziale in base a $f(x)=a^x,\ a>0$	**R**	$(0,+\infty)$	 
Funzione logaritmo in base a $f(x)=\log_a x,\ a>0$ e $a\neq 1$	$(0,+\infty)$	**R**	 

Proposizione: *la funzione esponenziale e la funzione logaritmo verificano le relazioni:*

- $a^{\log_a y_0} = y_0$ *per ogni* $y_0 \in (0,+\infty)$
- $\log_a\left(a^{x_0}\right) = x_0$ *per ogni* $x_0 \in \mathbf{R}$

Proposizione: *siamo a, x, y numeri reali positivi, con* $a \neq 1$*; sia z un numero reale; Valgono le seguenti proprietà:*

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^z = z \cdot \log_a x$

Se, inoltre, b è reale e positivo, $b \neq 1$*, vale la* **formula del cambiamento di base** *dei logaritmi* $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

ESEMPI

1. *Calcolare* $\log_3 \frac{1}{243}$ *e* $\log_5 \sqrt[3]{25}$

Possiamo procedere in due modi:

- usando la definizione di logaritmo:

$$x = \log_3 \frac{1}{243} \leftrightarrow 3^x = \frac{1}{243} \leftrightarrow 3^x = 3^{-5} \leftrightarrow x = 5;\ x = \log_5 \sqrt[3]{25} \leftrightarrow 5^x = \sqrt[3]{5^2} \leftrightarrow 5^x = 5^{\frac{2}{3}} \leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

- utilizzando le proprietà dei logaritmi e l'uguaglianza $\log_a a = 1$ per ogni $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 3^{-5} = -5 \cdot \log_3 3 = -5;\ \log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_5 5 = \frac{2}{3}$$

2. *Applicando le proprietà dei logaritmi trasformare l'espressione* $\ln\left(\frac{x \cdot z^3}{\sqrt[4]{y^5}}\right)^2$ *con* $x, y, z > 0$ *in somme algebriche.*

$$\ln\left(\frac{x \cdot z^3}{\sqrt[4]{y^5}}\right)^2 = 2 \cdot \ln\left(\frac{x \cdot z^3}{\sqrt[4]{y^5}}\right) = 2 \cdot \left[\ln\left(x \cdot z^3\right) - \ln\left(y^{\frac{5}{4}}\right)\right] = 2 \cdot \left[\ln x + \ln z^3 - \frac{5}{4}\ln y\right] = 2 \cdot \left[\ln x + 3\ln z - \frac{5}{4}\ln y\right] = 2\ln x + 6\ln z - \frac{5}{2}\ln y$$

3. *Applicando le proprietà dei logaritmi scrivere l'espressione* $3(\ln x - 2\ln y + 1) - \ln(x+y)$ *con* $x, y > 0$

Osserviamo che *ln(x+y)* è ben definito in quanto *x+ y>0*, essendo per ipotesi *x>0* e *y>0*.

$$3(\ln x - 2\ln y + 1) - \ln(x+y) = 3\left(\ln x - \ln y^2 + \ln e\right) - \ln(x+y) = 3\ln\frac{e\cdot x}{y^2} - \ln(x+y) = \ln\left(\frac{e\cdot x}{y^2}\right)^3 - \ln(x+y) = \ln\frac{e^3\cdot x^3}{y^6(x+y)}$$

4. *Determinare il dominio delle funzioni* $f_1(x) = \ln\left(x^2 - x - 12\right)$, $f_2(x) = \ln(x-4) + \ln(x+3)$ *e dire per quali valori di x vale la relazione*: $f_1(x) = f_2(x)$.

Il dominio di f_1 è $\operatorname{dom} f_1 = \left\{x \in \mathbf{R} : x^2 - x + 12 > 0\right\} = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$;
f_2 è somma di due funzioni: il suo dominio si trova facendo l'intersezione tra i domini delle funzioni $y = \ln(x-4)$ e $y = \ln(x+3)$, vale a dire $\operatorname{dom} f_2 = \{x \in \mathbf{R} : x - 4 > 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} : x + 3 > 0\} = (4, +\infty) \cap (-3, +\infty) = (4, +\infty)$

La relazione $f_1(x) = f_2(x)$ è soddisfatta per $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2 = (4, +\infty)$: infatti, possiamo applicare la proprietà (1) dei logaritmi se e solo se i fattori che compongono l'argomento del logaritmo sono tutti strettamente positivi.
Quindi per *x **Î**(4,+ ¥)* si ha:

$$f_1(x) = \ln\left(x^2 - x + 12\right) = \ln[(x-4)\cdot(x+3)] = \ln(x-4) + \ln(x+3) = f_2(x)$$

Data ultima revisione 11/05/00

5. *Risolvere le seguenti* **equazioni esponenziali**:

- $\dfrac{3^{x+1}}{27^{2x}} = \dfrac{1}{3^{x^2+5}}$

I denominatori sono entrambi non nulli (la quantità a^x è positiva per qualsiasi valore di x), quindi non vi sono condizioni di esistenza da porre.

$$\frac{3^{x+1}}{27^{2x}} = \frac{1}{3^{x^2+5}} \leftrightarrow \frac{3^{x+1}}{3^{6x}} = \left(3^{x^2+5}\right)^{-1} \leftrightarrow 3^{x+1-6x} = 3^{-\left(x^2+5\right)} \leftrightarrow 1-5x = -x^2-5 \leftrightarrow x^2-5x+6=0 \leftrightarrow x=2 \cup x=3$$

- $2^{x+2} - 2^x = 3^{x+1} + 2\cdot 3^x$

Si ha:

$$2^{x+2} - 2^x = 3^{x+1} + 2\cdot 3^x \leftrightarrow 2^x\cdot 2^2 - 2^x = 3^x\cdot 3 + 2\cdot 3^x \leftrightarrow 3\cdot 2^x = 5\cdot 3^x$$

Poiché entrambi i membri dell'equazione sono positivi possiamo applicare il logaritmo (di base qualsivoglia) ad ambo i membri dell'equazione

$$\ln\left(3\cdot 2^x\right) = \ln\left(5\cdot 3^x\right) \leftrightarrow \ln 3 + x\ln 2 = \ln 5 + x\ln 3 \leftrightarrow x\ln 2 - x\ln 3 = \ln 5 - \ln 3 \leftrightarrow x\left(\ln 2 - \ln 3\right) = \ln 5 - \ln 3 \leftrightarrow x = \frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 2 - \ln 3} = \frac{\ln\frac{5}{3}}{\ln\frac{2}{3}}$$

- $2^{2x} + 8 \cdot 2^x - 9 = 0$

Possiamo ricondurci ad una equazione di secondo grado mediante la sostituzione $2^x = t$: $t^2 + 8t - 9 = 0 \leftrightarrow t = 1 \cup t = -9$.

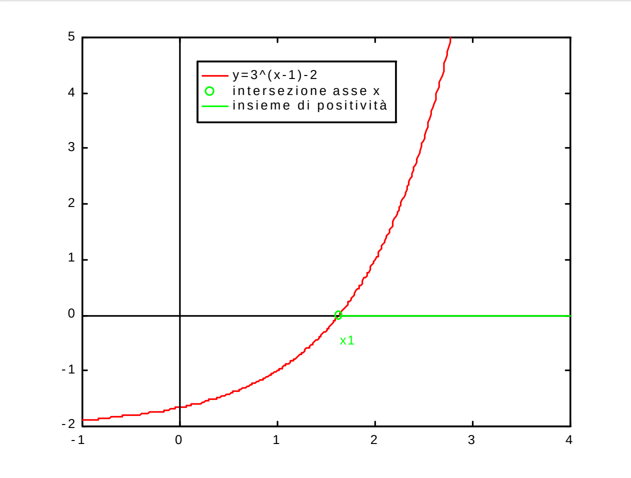
$t = 1 \leftrightarrow 2^x = 1 \leftrightarrow x = 0$

$t = -9 \leftrightarrow 2^x = -9$ impossibile, essendo $2^x > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$

6. *Risolvere le seguenti* **disequazioni esponenziali**:

- $3^{x-1} - 2 > 0$

Si tratta di trovare l'insieme di positività della funzione $y = 3^{x-1} - 2$.



Otteniamo il grafico della funzione partendo da $y=3^x$ ed applicando la traslazione $t(1,-2)$.

Il grafico della funzione si svolge al di sopra dell'asse delle ascisse per $x \in (x_1, +\infty)$.
Per determinare x_1 risolviamo l'equazione:

$$3^{x-1} - 2 = 0 \leftrightarrow 3^{x-1} = 2 \leftrightarrow x - 1 = \log_3 2 \leftrightarrow x = \log_3 2 + 1$$

- $8^{x+2} > 32^{4x+1}$

Risolviamo la disequazione in modo algebrico.

Osservazione: *ricordiamo che la disequazione esponenziale della forma* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (1) *equivale a* $\begin{array}{l} f(x) > g(x) \text{ se } a > 1 \\ f(x) < g(x) \text{ se } 0 < a < 1 \end{array}$.

Possiamo ricondurre la disequazione nella forma (1) utilizzando le proprietà delle potenze:

$$8^{x+2} > 32^{4x+1} \leftrightarrow \left(2^3\right)^{x+2} > \left(2^5\right)^{4x+1} \leftrightarrow 2^{3(x+2)} > 2^{5(4x+1)} \leftrightarrow 3(x+2) > 5(4x+1) \leftrightarrow x < \frac{1}{17}$$

- $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \geq 4^{-1}$

Una volta ricondotta la disequazione nella forma (1), osserviamo che occorre cambiare il verso quando si passa alla disuguaglianze tra gli esponenti in quanto la base dell'esponenziale è minore di 1.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \geq 4^{-1} \leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \geq \frac{1}{4} \leftrightarrow x^2 \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

7. *Risolvere le seguenti* **equazioni logaritmiche**:

- $\log_3\left(x^2-16\right)=2$

Affinché esista il logaritmo al primo membro deve essere $x^2-16>0 \leftrightarrow x\in\left(-\infty,-4\right)\cup\left(4,+\infty\right)$.
Applicando la definizione di logaritmo otteniamo:

$$\log_3\left(x^2-16\right)=2 \leftrightarrow x^2-16=3^2 \leftrightarrow x=\pm 5$$

entrambe le soluzioni sono accettabili perché comprese nell'insieme di esistenza.

- $\log_{x-1} 3=2$

Affinché esista il logaritmo a primo membro dobbiamo imporre che $x-1>0$ e $x-1\neq 1$ (la base del logaritmo è una quantità maggiore di zero e diversa da 1), vale a dire $x\in\left(1,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.

Applicando la definizione di logaritmo, si ha:

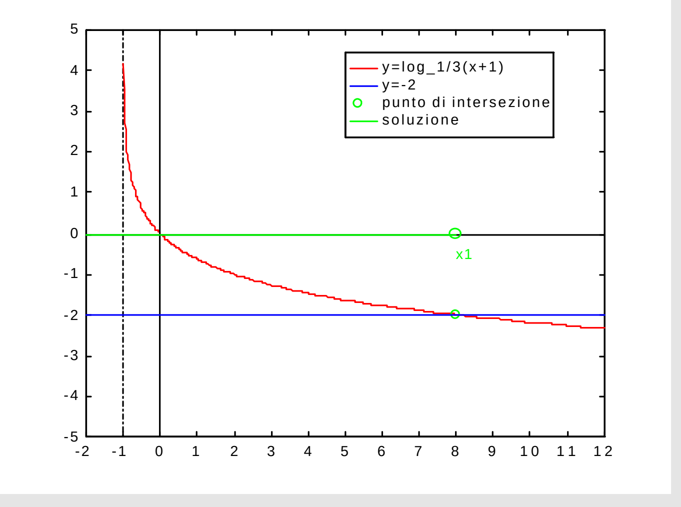
$$\log_{x-1} 3=2 \leftrightarrow \left(x-1\right)^2=3 \leftrightarrow x^2-2x-2=0 \leftrightarrow x=1-\sqrt{3}<0 \cup x=1+\sqrt{3}>2$$

La condizione di esistenza è verificata solamente dalla soluzione $x=1+\sqrt{3}$.

8. Risolvere le seguenti **disequazioni logaritmiche***:*

- $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > -2$

La condizione di esistenza del logaritmo a primo membro è *x>-1*.
Si tratta di determinare gli intervalli in cui il grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ si svolge al di sopra del grafico di $y = -2$.



La soluzione della disequazione è $x \in (-1, x_1)$, dove x_1 è la soluzione della equazione

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) = -2 \leftrightarrow x = 8$$

Data ultima revisione 11/05/00

- $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-3x\right)>\log_{\frac{1}{2}}\left(4x-12\right)$

Osservazione: *ricordiamo che la disequazione logaritmica della forma* $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ *equivale a*

$$\text{se } a>1 \quad \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$$

$$\text{se } 0<a<1 \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}.$$

Nel nostro caso, essendo la base *a=1/2 < 1*, si ha:

$$\begin{cases} x^2-3x>0 \\ 4x-12>0 \\ x^2-3x<4x-12 \end{cases} \qquad \leftrightarrow x\in(3,4)$$

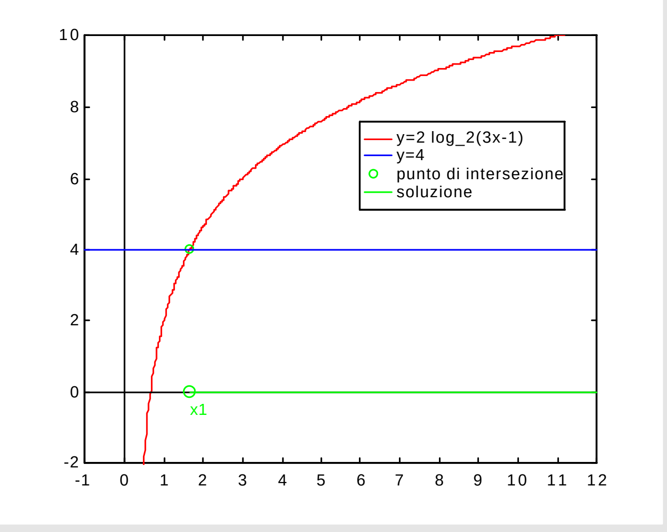
- $2 \cdot \log_2(3x-1) > 4$

- soluzione algebrica

$$\begin{cases} 3x-1>0 \\ \log_2(3x-1)>2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \\ \log_2(3x-1)>\log_2 4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3} \\ x>\dfrac{5}{3} \end{cases} \leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{3},+\infty\right)$$

- soluzione grafica

La condizione di esistenza è $x>1/3$.Tracciamo i grafici delle funzioni $y = 2 \cdot \log_2(3x-1)$ e $y=4$:



Il grafico di $y = 2 \cdot \log_2(3x-1) = 2 \cdot \log_2\left(3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)$ si può ottenere dal grafico di $y = \log_2 x$ applicando la trasformazione:

$$y = \log_2 x \xrightarrow{d\left(\frac{1}{3},2\right)} y = 2 \cdot \log_2 3x \xrightarrow{t\left(\frac{1}{3},0\right)} y = 2 \cdot \log_2\left[3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]$$

La soluzione della disequazione è $(x_1, +\infty)$, dove x_1 è la soluzione dell'equazione

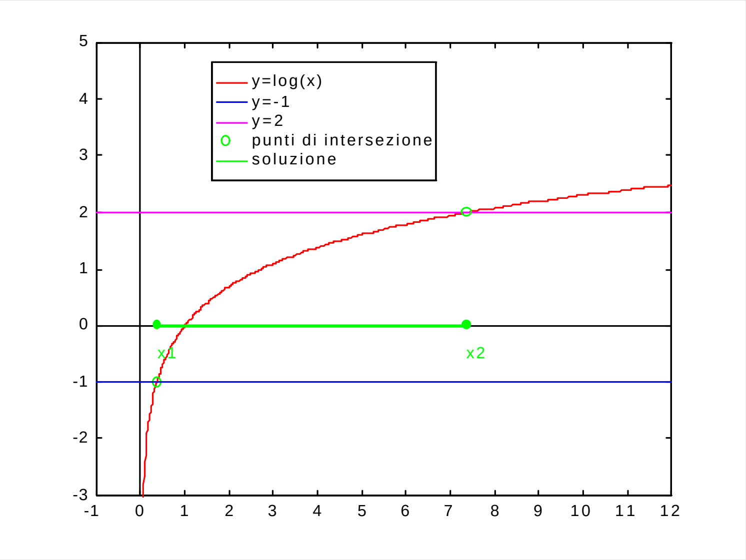
$$2 \cdot \log_2(3x-1) = 4 \leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

- $\ln^2 x - \ln x - 2 \le 0$

La condizione di esistenza è $x > 0$

Possiamo ricondurci ad una disequazione di secondo grado mediante la sostituzione $\ln x = t$: $t^2 - t - 2 \le 0 \leftrightarrow -1 \le t \le 2$.

Risolviamo la disequazione $-1 \le \ln x \le 2$ in modo grafico:



Il grafico di $y = \ln x$ è compreso tra le rette $y=-1$ e $y=2$ per $x \in [x_1, x_2]$.

Abbiamo

$$x_1\text{: } \ln x = -1 \leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$x_2\text{: } \ln x = 2 \leftrightarrow x = e^2$$